Der größte gemeinsame Teiler ist eine ganze Funktion

16. 4. 2014 (Das Beispiel 22 und kleine Ergänzungen wurden am 25.10.2015 eingefügt)

Wolfgang Schramm

wolfgang.schramm@meduniwien.ac.at

I Einführung

Der größte gemeinsame Teiler $ggT:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0$ zweier ganzer Zahlen ist die größte natürliche Zahl einschließlich der 0 (die allerdings hinsichtlich der Größe eine gewisse Ausnahme darstellt, wie dies am Anfang des Abschnitts IV gezeigt wird), durch die beide ohne Rest teilbar sind. Dieser *ggT* kann beispielsweise mit dem euklidischen Algorithmus bzw. durch Bestimmung der gemeinsamen Primfaktoren berechnet werden:

Beispiel 1)

$$ggT(112,36)=4$$

denn die Primfaktorzerlegung von 112 bzw. 36 lautet:

$$112=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7$$

$$36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

und die gemeinsamen Primfaktoren sind $2\cdot 2$ woraus obiges Resultat folgt.

Euklid von Alexandria war ein griechischer Mathematiker, der wahrscheinlich im 3. Jahrhundert v. Chr. in Alexandria gelebt hat. Der (vermutlich nicht von ihm stammende) euklidische Algorithmus wird in seinem Werk „Die Elemente“ beschrieben.

Aber zunächst einmal eine Erläuterung der Überschrift: Eine der beiden Argumente des $ggT()$ kann durch eine komplexe Zahl ersetzt werden, wenn das andere Argument auf die natürlichen Zahlen eingeschränkt wird: $ggT:\mathbb{C}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ und das Ergebnis ist wieder eine komplexe Zahl. Ganze Funktionen $f()$ sind solche, die jeder komplexen Zahl wiederum eine komplexe Zahl zuordnen, d.h. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und zudem besonders „schöne“ Eigenschaften haben. Der größte gemeinsame Teiler kann also in einer Variablen analytisch zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden und ist aus zahlentheoretischer Sicht demnach eine Folge ganzer Funktionen.

Das Ziel dieses Skriptums ist es einem breiten Leserkreis den in [1] publizierten Beweis, mit möglichst einfachen Hilfsmitteln zu präsentieren. Wenn Sie sich aber die Frage stellen, was (jedenfalls ein Teil) dieses Skriptums mit der Medizin zu tun hat, dann folgen Sie zuerst etwa dem Link [2].

Zunächst aber einige Worte zur komplexen Zahlenebene: Während sich die reellen Zahlen durch Punkte auf einer Zahlengeraden veranschaulichen lassen, kann man die komplexen Zahlen als Punkte in einer Ebene (=komplexe Ebene bzw. Gaußsche Zahlenebene) darstellen.

Die Einführung der imaginären Einheit $i := \sqrt{-1}$ als neue Zahl wird Leonhard Euler zugeschrieben mit deren Hilfe jede komplexe Zahl

$$z = x + i \cdot y \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

in der Gaußschen Ebene als ein genau darauf definierter Punkt repräsentiert wird. Mit diesen komplexen Zahlen lassen sich in der Mathematik (wie auch in deren Anwendungen, der Physik, Chemie und den Ingenieurwissenschaften) oftmals unanschauliche Dinge einfach darstellen. So kann beispielsweise $x^2 + y^2$ in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$(x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + y^2 \tag{1.2}$$

was im Reellen im Allgemeinen (d.h. wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$) nicht möglich ist. Die Zahl $x - iy$ bezeichnet man auch als die zu $x + iy$ konjugiert komplexe Zahl, wobei deren Produkt $(x+iy)\cdot(x-iy)$ stets eine reele Zahl ist, nämlich (1.2).

Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855) war ein deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker mit einem breit gefächerten Feld an Interessen.

Die Überschrift könnte demnach vermuten lassen, dass der größte gemeinsame Teiler von 3 und $\frac{1}{2}$ bzw. von 7 und $\sqrt{-1}$ (z.B. im Internet) berechenbar ist und sogar (da ganze Funktionen beliebig oft differenzierbar sind) die erste, zweite, … q-te, .. Ableitung des größten gemeinsamen Teilers, oder etwa das (unbestimmte) Integral $\int ggT(z,n)\,dz$ mit Sinn erfüllt sind. Dies trifft auch tatsächlich zu.

Wenn Sie etwa die Antwort auf genau solche Fragen interessiert, dann sollte das vorliegende Skriptum das richtige für Sie sein. Wenn Sie zudem bereits entsprechende Vorkenntnisse in der Mathematik haben, dann gibt es einen schnelleren Weg indem Sie dem Link [1] folgen.

Hier aber zunächst die exakte

Definition: Ganze Funktion: In der Funktionentheorie ist eine ganze Funktion eine Funktion, die in der gesamten komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Ein äquivalenter Begriff zu holomorph ist analytisch und Beispiele für auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktionen sind Polynome, die Exponentialfunktion e^x und die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$. Gemeinsam ist allen auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen und folglich ganzen Funktionen, dass sich diese um jeden Punkt der komplexen Ebene mittels einer Potenzreihe mit beliebig großem Konvergenzradius darstellen lassen und daher leicht berechenbar sind. Etwa die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion um den Punkt $z = 0$ lautet:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

welche auch häufig als deren Definitionsgleichung dient.

Die Exponentialfunktion hat bekanntermaßen die folgende Funktionalgleichungs-Eigenschaft:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{1.4}$$

Der Wert dieser ganzen Funktion (1.3) an der Stelle 1, d.h.

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{\underbrace{0!}_{1}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots = 2{,}7182818\ldots$$

wird als die Eulersche Zahl bezeichnet. Diese letzteren 2 Eigenschaften legen umgekehrt (1.3) eindeutig fest und könnten daher gleichfalls für die Exponentialfunktion als Definition herhalten.

Leonhard Euler (1707-1783) war einer der bedeutendsten Mathematiker, erblindete mit 64 a vollständig und trotzdem entstand danach fast die Hälfte seines Lebenswerks.

Ebenso auf Leonhard Euler geht die folgende Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen zurück, und wird daher auch als Eulersche Formel bezeichnet:

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi) \tag{1.5}$$

welche Euler im Jahr 1748 in seinem zweibändigen Werk Introductio in analysin infinitorum eingeführt hat, wobei der zunächst reelle Winkel φ im Bogenmaß (= Radiant) gemessen wird. Jede Funktion $f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ lässt sich trivialerweise eindeutig als Summe einer geraden $f_{gerade}(z) := \frac{f(z)+f(-z)}{2}$ und einer ungeraden $f_{ungerade}(z) := \frac{f(z)-f(-z)}{2}$ Funktion darstellen, d.h.: $f(z) = f_{gerade}(z) + f_{ungerade}(z)$, was in der Eulerschen Formel (1.5) mit der:

Definition: Trigonometrische Funktionen $\sin(\varphi)$ **und** $\cos(\varphi)$**:**

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad i\cdot\sin(\varphi) := \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2} \tag{1.6}$$

auch so geschieht. Daraus folgen die Symmetrieeigenschaften:

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \text{ als gerade und } \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi) \text{ als ungerade Funktion} \tag{1.7}$$

Wenn nun der Winkel $\varphi\in\mathbb{R}$ zunächst formal auf die gesamte komplexe Ebene ausgeweitet wird, so sind die trigonometrischen Funktionen sin() und cos() (als Summe zweier Exponentialfunktionen) daher ebenso ganze Funktionen mit den aus (1.6) und (1.3) folgenden Potenzreihen:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \forall z\in\mathbb{C} \tag{1.8}$$

Bemerkung: In Potenzreihen gerader (resp. ungerader) Funktionen $f(z)$ können nur grade (resp. ungerade) Exponenten von z auftreten, was ja für (1.8) auch zutrifft. Da Potenzreihen ganzer Funktionen in der gesamten komplexen Ebene konvergieren, nehmen diese für kein $z\in\mathbb{C}$ die Werte $\pm\infty$ an, weshalb auch kein negativer Exponent vorkommen darf, wie etwa in der Funktion $\frac{1}{z}$, welche folglich auch keine ganze Funktion sein kann.

Schließlich muss wegen (1.4), (1.5), (1.7) und (1.2):

$$e^0 = e^{i\cdot\varphi-i\cdot\varphi} \overset{(1.4)}{=} e^{i\cdot\varphi}\cdot e^{-i\cdot\varphi} \overset{(1.5)(1.7)}{=} (\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi))\cdot(\overbrace{\cos(-\varphi)}^{=\cos(\varphi)} + \overbrace{i\cdot\sin(-\varphi)}^{=-i\cdot\sin(\varphi)}) \overset{(1.2)}{=} \cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\text{, d.h.}$$

$$\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi) = 1 \tag{1.9}$$

gelten, was ja gleichfalls eine bekannte Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen ist.

Um möglichst wenig (d.h. nur die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen wie $\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$ und $\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$ sowie leicht daraus ableitbare Eigenschaften (vgl. Abb 1) wie etwa (1.7) und (1.9)) vorauszusetzen, werden die meisten Schritte in den nun folgenden Abschnitten auf möglichst basalem Niveau bewiesen. Sollte Ihnen die Einleitung nicht vollkommen fremdartig vorgekommen sein, dann werden Sie vermutlich mit nur geringem Aufwand auch den weiteren Abschnitten folgen können.

II Einheitswurzeln:

Legt man einen Kreis vom Radius 1 genau in das Zentrum (d.h. um den Punkt (0,0)) in die Gaußsche Zahlenebene, dann liegen alle so genannten Einheitswurzeln auf diesem Kreis.

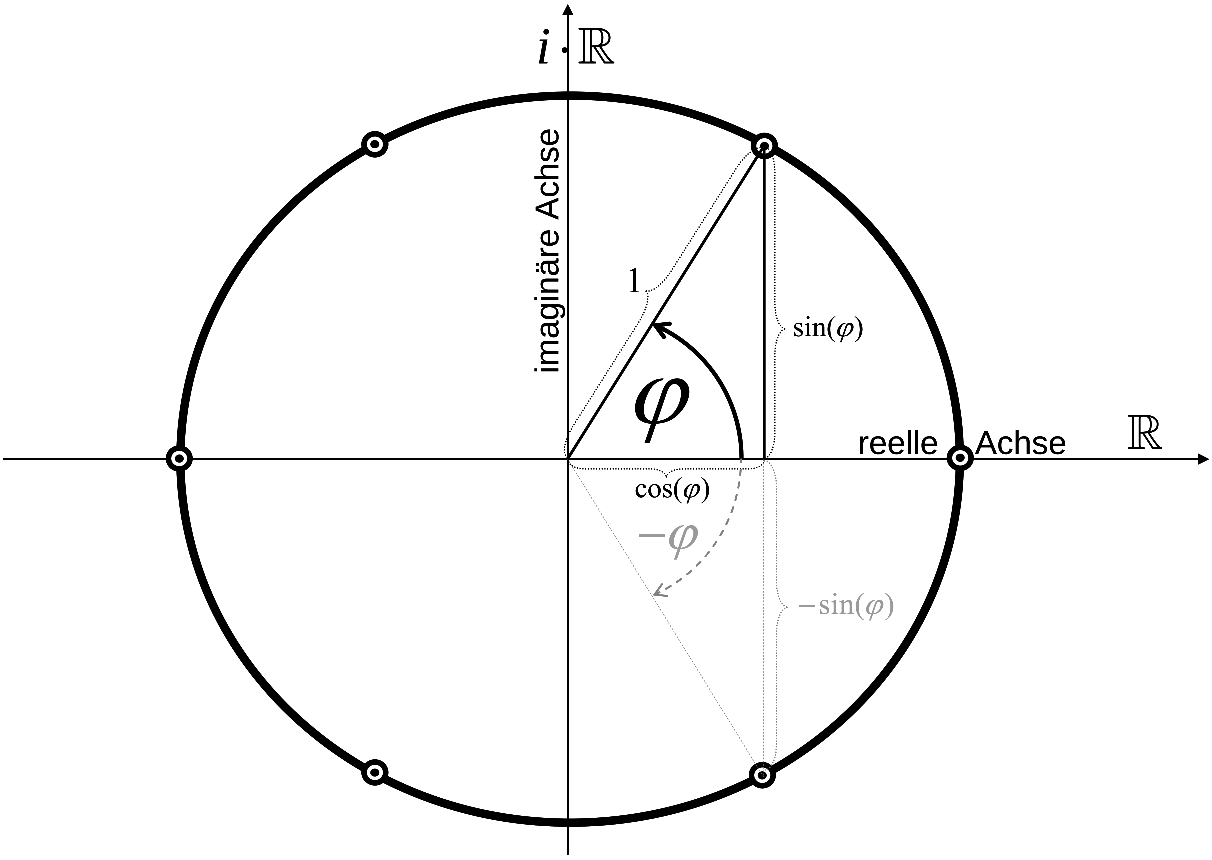


Abbildung 1: Die (hier 6.) Einheitswurzeln liegen auf auf einem Kreis mit Radius 1 (=Einheitskreis) in der Gaußschen Zahlenebene. Aus der Abbildung sind die Symmetrieeingenschaften (1.7) sofort ersichtlich und aus dem Pythagoräischen Lehrsatz folgt (1.9). Die in der Abb. angegebenen Längen (Beträge) sollten genau genommen als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene geschrieben werden, etwa statt der 1 der Vektor $\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)$.

Ein solcher Kreis in der Gaußschen Ebene mit Radius 1 wird z.B. durch die Parametrisierung

$$\begin{aligned} x &= \cos(\varphi) \\ y &= i\cdot\sin(\varphi) \end{aligned} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi) \qquad (1.10)$$

beschrieben. Nach einer vollen Umrundung des Kreises (d.h. wenn etwa der Winkel φ ausgehend von 0 bis 2π wandert) wird selbstverständlich der Ausgangspunkt wieder erreicht. Übrigens der Winkel φ (gemessen im Bogenmaß = Radiant) und die Bogenlänge auf dem Kreis mit Radius 1 (=Einheitskreis) ist dasselbe. Der Ausgangspunkt für die Bogenlänge ist definitionsgemäß der Punkt (1,0) in der Gaußschen Zahlenebene (dies entspricht in Abb. 1 dem rechten Schnittpunkt der reellen Achse mit dem Einheitskreis) und der Kreis wird entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen.

Wird dieser Kreis beginnend beim Punkt (1,0) in n gleich lange Kreissegmente unterteilt (in der Abb. 1 wurde z.B.: $n=6$ gewählt), dann ergeben die Endpunkte, wenn diese mit Geraden verbunden werden, ein regelmäßiges n-Eck (in Abb. 1 demzufolge ein regelmäßiges 6-Eck).

Genau diese (hier für $n=6$ markierten) Punkte werden als die n-ten Einheitswurzeln bezeichnet. Die n-ten Einheitswurzeln haben daher die folgenden Koordinaten in der komplexen Ebene:

$$\cos(k\cdot\varphi)+i\cdot\sin(k\cdot\varphi) \qquad \varphi=\frac{2\cdot\pi}{n};\ \ k\in\{0,1,2,...,n-1\};\ n\in\mathbb{N} \tag{1.11}$$

Wird für $n=6$, d.h. für $\varphi=\dfrac{2\cdot\pi}{6}$ gewählt und durchläuft k die Zahlen von 0 bis 5, dann ergeben sich aus (1.11) die in Abb. 1 markierten Punkte, also die 6-ten Einheitswurzeln mit den folgenden Werten:

$$\begin{aligned}
&\cos(0\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})+i\cdot\sin(0\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})=1+i\cdot 0=1\\
&\cos(1\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})+i\cdot\sin(1\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\cos(2\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})+i\cdot\sin(2\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\cos(3\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})+i\cdot\sin(3\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})=-1\\
&\cos(4\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})+i\cdot\sin(4\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})=-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\cos(5\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})+i\cdot\sin(5\cdot\frac{2\cdot\pi}{6})=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Es sind dies zwangsläufig 6 verschiedene 6-te Einheitswurzeln.

Wir formulieren jetzt den ersten mathematischen Satz, der in diesem Abschnitt auch bewiesen wird:

Das Produkt von beliebig vielen *n*-ten Einheitswurzeln ergibt wieder eine *n*-te Einheitswurzel. (1.13)

Wenn das Produkt von jeweils zwei n-ten Einheitswurzeln wieder eine n-te Einheitswurzel ergibt, dann folgt offenbar (1.13) durch vollständige Induktion.

Wir wollen den Satz (1.13) zunächst anhand (1.12), d.h. einiger 6-ter Einheitswurzeln (beispielhaft) nachprüfen:

$$\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\underbrace{i^2}_{-1}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overset{(1.2)}{=}-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=-1$$

Weitere Beispiele sind eine leichte Übung für den Leser.

Gleichfalls werden wir in diesem Abschnitt auch den folgenden Satz beweisen:

Die Inverse einer *n*-ten Einheitswurzel ist wieder eine *n*-te Einheitswurzel. (1.14)

und wollen dies ebenso anhand (1.12) beispielhaft überprüfen:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\overset{(1.2)}{=}\frac{\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Der Rest ist wieder eine leichte Übung für den Leser.

Die beiden Sätze, nämlich (1.13) und (1.14) ergeben zusammen:

Die *n*-ten Einheitswurzeln bilden eine abelsche Gruppe mit *n* Elementen. (1.15)

Denn wenn das (hier zwangsläufig kommutative, d.h. vertauschbare) Produkt und das Inverse aller Elemente einer (das Assoziativgesetz erfüllenden) Menge mit neutralem Element wieder zu dieser Menge gehören, dann ist dies geradewegs die Definition einer (abelschen) Gruppe. (Das Assoziativgesetz ist hier trivialerweise erfüllt und das neutrale Element ist die Zahl 1.)

Abraham de Moivre (1667-1754) war ein französischer Mathematiker und ein enger Freund von Sir Isaac Newton.

Für den Beweis dieser Sätze müssen wir etwas ausholen:

Eine wesentliche Vorarbeit dazu hat der französische Mathematiker Abraham de Moivre geleistet, indem er die nach ihm benannte Moivresche Formel (bisweilen auch Moivrescher Satz genannt) im ersten Jahrzehnt des 18. Jahrhunderts gefunden hat:

$$\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^m=\cos(m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(m\cdot\varphi) \qquad (1.16)$$

Mit dem Winkel $\varphi\in\mathbb{R}$ im Bogenmaß.

Diese Identität lässt sich etwa mittels vollständiger Induktion, (d.h. zunächst für $m=1$ und durch Schluss von m auf $m+1$) beweisen – womit dann (1.16) für alle $m\in\mathbb{N}$ gilt. Für $m=1$ steht auf beiden Seiten von (1.16) dasselbe und ist folglich eine Trivialität. Wir gehen also jetzt davon aus, dass Gleichung (1.16) für m richtig ist (dies ist die so genannte Induktionsvoraussetzung) und müssen diese daher nur noch für $m+1$ beweisen:

$$\begin{aligned}
&\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^{m+1}=\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^{m}\cdot\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)=\\
&\overset{(1.16)}{=}\cos(m\cdot\varphi)+i\sin(m\cdot\varphi)\cdot\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)=\\
&=\left(\cos(m\cdot\varphi)\cdot\cos(\varphi)-\sin(m\cdot\varphi)\cdot\sin(\varphi)\right)+i\cdot[\cos(m\cdot\varphi)\cdot\sin(\varphi)+\sin(m\cdot\varphi)\cdot\cos(\varphi)]=\\
&=\cos((m+1)\cdot\varphi)+i\cdot\sin((m+1)\cdot\varphi)
\end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen beruht auf der Induktionsvoraussetzung und das letzte folgt aus den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen:

$$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cdot\cos(y)\mp\sin(x)\cdot\sin(y) \tag{1.17}$$

$$\sin(x\pm y)=\sin(x)\cdot\cos(y)\pm\sin(y)\cdot\cos(x) \tag{1.18}$$

die entweder aus den in der Einleitung angeführten Beziehungen (1.4) und (1.5) zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen nahezu sofort ablesbar sind bzw. minimal aufwändiger (s. Anhang bzw. [3]) ohne diese Vorkenntnisse bewiesen werden können.

Ein Produkt mit der komplexen Zahl $\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)$ kann auch als eine Rotation um den Winkel φ in der Gausschen Zahlenebene (s. Abb. 1) und das m-fache Produkt $\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^{m}$ wegen (1.16) demnach als eine Rotation um den Winkel $m\cdot\varphi$ aufgefasst werden. Die Vermutung liegt daher nahe, dass eine Division durch $\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^{m}$ als eine Rotation um den Winkel $m\cdot\varphi$ in die Gegenrichtung interpretiert werden kann, was tatsächlich der Fall ist, denn:

Die Moivre'sche Formel (1.16) gilt allgemeiner, nicht nur für alle $m\in\mathbb{N}$ sondern sogar für alle $m\in\mathbb{Z}$. Für $m=0$ ist (1.16) ebenso eine Trivialität: $\underbrace{\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^{0}}_{1}=\underbrace{\cos(0\cdot\varphi)}_{1}+i\cdot\underbrace{\sin(0\cdot\varphi)}_{0}$ und für negative m wie vermutet:

$$\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^{-m}:=\frac{1}{\left(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right)^{m}}\overset{(1.16)}{=}\frac{1}{\cos(m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(m\cdot\varphi)}=\cos(-m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(-m\cdot\varphi)$$

wobei das mittlere Gleichheitszeichen aus (1.16) und das letzte Gleichheitszeichen aus:

$$\frac{1}{\cos(m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(m\cdot\varphi)}=\frac{\cos(-m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(-m\cdot\varphi)}{\left[\cos(m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(m\cdot\varphi)\right]\cdot\left[\cos(-m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(-m\cdot\varphi)\right]}$$

folgt, da der Ausdruck im Nenner, als Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen vom Betrag 1: $\left[\cos(-m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(-m\cdot\varphi)\right]\cdot\left[\cos(m\cdot\varphi)+i\cdot\sin(m\cdot\varphi)\right]\overset{(1.7)}{\underset{(1.2)}{=}}\cos^2(m\cdot\varphi)+\sin^2(m\cdot\varphi)\overset{(1.9)}{=}1$ den Wert 1 ergibt.

Damit ist der Satz von Moivre (1.16) für alle $m\in\mathbb{Z}$ bewiesen.

Um (1.16) etwas kompakter anzuschreiben, benützen wir nun die Schreibweise aus der Eulerschen Formel (1.5), dann lautet der Moivre'sch Satz (1.16):

$$\left(e^{i\cdot\varphi}\right)^m = e^{i\cdot m\cdot\varphi} \qquad \forall m\in\mathbb{Z};\varphi\in\mathbb{R} \qquad (1.19)$$

was auch gleichzeitig die Eulersche Formel motiviert, denn (1.19) ist eine der Eigenschaften der Exponentialfunktion (1.3), die auch aus der iterativen Anwendung von (1.4) folgen würde.

Induktiv folgt nun aus (1.19):

$$e^{i\cdot m_1\cdot\varphi}\cdot e^{i\cdot m_2\cdot\varphi} = e^{i\cdot(m_1+m_2)\cdot\varphi} \qquad \forall m_1,m_2\in\mathbb{Z};\varphi\in\mathbb{R} \qquad (1.20)$$

Weiter aus (1.16) in der Schreibweise (1.5) auch, dass

$$e^{2\pi\cdot i\cdot k} = 1 \qquad \forall k\in\mathbb{Z} \qquad (1.21)$$

sowie die Eulersche Identität $e^{\pi\cdot i} = -1$.

Bei einer vollen Umrundung des Einheitskreises (setze $k=1$ in (1.21)) wird also tatsächlich wieder der Punkt 1 auf der reellen Achse, d.h. der Punkt (1,0) in der Gaußschen Zahlenebene erreicht, was letztlich Gauß zur Einführung der nach ihm benannten Ebene bewogen hat.

Wir wollen jetzt aber (1.13) sowie (1.14) und damit (1.15) zeigen. Wir setzen dazu $\varphi = \frac{2\cdot\pi}{n}$ für ein $n\in\mathbb{N}$ in (1.19) ein und erhalten so alle *n*-ten Einheitswurzeln:

$$e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m}{n}} \qquad m\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N} \qquad (1.22)$$

wobei es aber wegen (1.21) nur *n* verschiedene gibt, also genügt es z.B. lediglich diejenigen mit $0\le m<n$ oder beispielsweise auch diejenigen mit $1\le m\le n$ auszuwählen (oder ein beliebiges anderes wie man auch sagt vollständiges Repräsentantensystem bzw. hier vollständiges Restsystem modulo *n*, das im nächsten Abschnitt erörtert wird.)

Das Produkt zweier *n*-ter Einheitswurzeln ergibt daher mit (1.20)

$$e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_1}{n}}\cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_2}{n}} = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(m_1+m_2)}{n}} \qquad m_1,m_2\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N} \qquad (1.23)$$

tatsächlich wieder eine *n*-te Einheitswurzel, und das Inverse einer *n*-ten Einheitswurzel (ersetze in (1.22) *m* durch –*m*) auch, da ja für eine beliebige ganze Zahl $m\in\mathbb{Z}$ auch die negative $-m\in\mathbb{Z}$, d.h. wiederum eine ganze Zahl ist. Damit ist (1.15) gezeigt. Die Beziehung zwischen den *n*-ten Einheitswurzeln und den Drehungen eines regelmäßigen *n*-Ecks und letztlich der Satz (1.15) kann auch dahingehend interpretiert werden, dass zwischen den Multiplikationen mit *m*-ten Potenzen einer *n*-ten Einheitswurzel (1.22) einerseits und den Rotationen eines regulären Vielecks mit *n* Ecken um den Winkel $\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot m}{n}$ mit $m\in\mathbb{Z}$ andererseits, der sogenannten zyklischen Gruppe (s. Drehgruppe) der Ordnung *n*, ein Isomorphismus d.h. eine mathematische Strukturgleichheit besteht. Eine andere Darstellung dieser zyklischen Gruppe liefert die Addition modulo *n*, also obig erwähnte Restklassenarithmetik auf die nun im folgenden Abschnitt kurz eingegangen wird.

Bemerkt sei abschließend, dass (1.23) der Funktionalgleichung (1.4) für alle *n*-ten Einheitswurzeln entspricht, welche dicht am Einheitskreis liegen und letztlich damit aus (1.23) mit etwas Aufwand auch (1.4) bewiesen werden kann.

III Restklassenarithmetik

Das Ergebnis jeder Division einer beliebigen ganzen Zahl *m* durch eine beliebige natürliche Zahl *n,* welche in Hinkunft als Modul bezeichnet wird, lässt sich eindeutig als Summe aus einem ganzzahligen Anteil $q \cdot n$ und einem Rest *r*, der zwischen $0 \le r < n$ liegt, darstellen:

$$m = q \cdot n + r \tag{1.24}$$

Etwa für $n = 6$ und $m = -11$ gilt: $-11 = (-2) \cdot 6 + 1$, also $q = -2$ und $r = 1$.
Es gibt für (1.24) demnach genau *n* unterschiedliche Werte, die der Rest *r* annehmen kann, nämlich $0 \le r < n$. Bei vorgegebenem Modul *n* kann mit Hilfe des Rests *r* also jede ganze Zahl *m* genau einer Klasse mit gleichem Rest zugeordnet werden, die in Hinkunft Restklasse genannt wird und in diesem Abschnitt in eckiger Klammer mit dem Modul als Index $[r]_n$ angeschrieben wird. Etwa die ganzen Zahlen $\{-11, -5, 1, 7, 13\}$ liegen alle in der Restklasse $[1]_6$, es sind dies zwangsläufig unendlich viele ganze Zahlen in jeder Restklasse.
Es gibt demnach zum Modul *n* genau *n* verschiedene Restklassen, nämlich für jedes *r* aus $0 \le r < n$ eine, etwa zum Modul 6 die Restklassen $[0], [1], [2], [3], [4]$ und $[5]$. Zwei Zahlen m_1 und m_2 gehören daher derselben Restklasse an, wenn ihre Differenz ein ganzzahliges Vielfaches von *n*, d.h.:

$$(m_1 - m_2) = q \cdot n \tag{1.25}$$

für ein $q \in \mathbb{Z}$ ist. Etwa zum Modul 6 in obigem Beispiel gilt $(-11 - 13) = -24 = (-4) \cdot 6$. In der Literatur sind die folgenden Schreibweisen für (1.25) üblich:

$$m_1 \equiv m_2 \ (n) \quad \text{bzw.} \quad m_1 \equiv m_2 \ (\text{mod } n) \tag{1.26}$$

(sprich: m_1 ist kongruent m_2 modulo *n*) bzw. für (1.24):

$$m \equiv r \ (n) \tag{1.27}$$

denn der ganzzahlige Anteil $q \cdot n$ ist oftmals irrelevant. Ein Beispiel dafür ist (1.23), denn mit (1.24) gilt:

$$e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot m}{n}} = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (q \cdot n + r)}{n}} \overset{(1.23)}{=} e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot q \cdot n}{n}} \cdot e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot r}{n}} = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot r}{n}} \tag{1.28}$$

da ja wegen (1.21) $e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot q \cdot n}{n}} = e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot q} = 1$ ist, d.h. der ganzzahlge Anteil $q \cdot n$ ist tatsächlich uninteressant. Die Sinnhaftigkeit der Schreibweise (1.26) sollte mit diesem Beispiel auch klar geworden sein und damit auch dieser Abschnitt.

Mir diesen Restklassen kann ähnlich wie mit den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gerechnet werden. Das Rechnen (Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren) mit den ganzen Zahlen bezeichnet man in der Mathematik als einen Ring und auch die Arithmetik mit den Restklassen bildet ebenso einen Ring, den sogenannten Restklassenring. Die Restklassenarithmetik ist durchaus vergleichbar mit der Arithmentik der ganzen Zahlen, etwa für die Addition von Restklassen gilt:

$$[m_1]_n + [m_2]_n = [m_1 + m_2]_n \tag{1.29}$$

wobei beispielsweise $[m_1]_n$ stellvertertend für $m_1 + q_1 \cdot n$ mit einem (beliebigen) $q_1 \in \mathbb{Z}$ steht. Ein Anwendungsbeispiel für diese Restklassenaddition ist wieder (1.23) $e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot m_1}{n}} \cdot e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot m_2}{n}} = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (m_1 + m_2)}{n}}$, denn ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von *n* ist ja gleichfalls wegen (1.21) irrelevant: $e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (m_1 + q_1 \cdot n)}{n}} \cdot e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (m_2 + q_2 \cdot n)}{n}} = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (m_1 + m_2 + (q_1 + q_2) \cdot n)}{n}}$. Dem Leser sollte die Bedeutung von (1.29) an diesem Beispiel unbedingt klar werden. Es ist auch leicht einzusehen, dass dann beim Zählen auf die Restklasse $[n-1]_n$ die Restklasse $[0]_n$ folgt.

Vollkommen analog zu (1.29) gilt dies auch für die Differenz

$$[m_1]_n - [m_2]_n = [m_1 - m_2]_n \tag{1.30}$$

wie auch für die Multiplikation

$$[m_1]_n \cdot [m_2]_n = [m_1 \cdot m_2]_n \tag{1.31}$$

Beispielsweise zum Modul 6 gilt $\underbrace{[-13]_6}_{[1]_6} \cdot [2]_6 = [-13 \cdot 2]_6 = [2]_6$.

Die Gleichung (1.31) steht stellvertretend für $(m_1 + q_1 \cdot n) \cdot (m_2 + q_2 \cdot n) = m_1 \cdot m_2 + q \cdot n$ und ausmultiplizieren liefert $q = m_2 \cdot q_1 + m_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_2 \cdot n$. Noch einfacher ist letztlich der Beweis von (1.29) und (1.30).

Da die Arithmetik also nahezu analog zu der Arithmetik der ganzen Zahlen abläuft, können wir, wenn klar ist, welche Restklassen (also welcher Modul) gemeint sind, den (Modul-)Index *n* und bisweilen sogar auch die eckigen Klammern wieder weglassen (was in diesem Skriptum ab dem nächsten Kapitel auch so notiert wird). Der Leser möge sich aber die hier nicht bewiesenen Gleichungen (1.29), (1.30) an weiteren Beispielen verinnerlichen und anschließend den Beweis dazu selbst versuchen.

Die Menge aller Restklassen modulo n bezeichnet man mit $\mathbb{Z}_n$, etwa $\mathbb{Z}_6 := \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$. Wie zu erwarten ist $\mathbb{Z}_n$ eine abelsche Gruppe mit der Restklassenaddition (1.29) und dem neutralen Element $[0]_n$. Das Inverse Element zu $[m]_n$ ist $[-m]_n$, denn aus (1.30) folgt $[m]_n + [-m]_n = [m-m]_n = [0]_n$ also tatsächlich wieder das neutrale Element. Genauso gut hätte auch statt $[-m]_n$ das inverse Element $[n-m]_n$ gewählt werden können, denn $[n]_n = [0]_n$, was ja aus (1.24) folgt - es gibt schließlich unendlich viele (wie man sagt) Vertreter in jeder Restklasse, also auch unendlich viele Vertreter für das neutrale Element $[0]_n$. Es ist auch leicht einzusehen, dass (1.30) nichts anderes als die Restklassenaddition von $[m_1]_n$ zur inversen Restklasse von $[m_2]_n$ ist.

Dazu etwas zur mathematischen Allgemeinbildung, was aber im Folgenden nicht benötigt wird und daher auch übersprungen werden kann:

Mit der Multiplikation (1.31) wird diese Gruppe zusammen mit dem Distributivgesetz $[m]_n \cdot [m_1 + m_2]_n = [m]_n \cdot [m_1]_n + [m]_n \cdot [m_2]_n$, welches letztlich aus (1.29) und (1.31) mit den obig angegebenen Rechehenregeld folgt, sogar ein Ring, der oben erwähnte Restklassenring modulo *n*. Ein Element $[m]_n$ aus diesem Ring, das invertierbar ist, für das demnach $[m]_n^{-1} \cdot [m]_n \cdot = [1]_n$ gelten muss, bezeichnet man als eine prime Restklasse, wobei $[1]_n$ das neutrale Element für die Multiplikation (welches auch Einselement genannt wird) in diesem Ring ist, das wegen (1.31) $[1]_n \cdot [m]_n = [m]_n$ für alle Ringelemente $[m]_n$ erfüllt. Die primen Restklassen modulo *n* bilden eine abelsche Gruppe, welche prime Restklassengruppe modulo *n* genannt wird. Sie ist die sogenannte Einheitengruppe dieses Restklassenrings. Ein Repräsentant für das invertierbare Element in $[m]_n^{-1} \cdot [m]_n \cdot = [1]_n$ bzw. in der Schreibweise (1.27) $m_1 \cdot m \equiv 1\ (n)$ bzw. $m_1 \cdot m = q \cdot n + 1$ d.h. für $[m]_n^{-1} = [m_1]_n$ lässt sich etwa mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus bestimmen. Dieser Algorithmus wird auf die Zahlen m

und n angewendet und liefert ganze Zahlen s und t, die die Gleichung $s \cdot m + t \cdot n = 1$ erfüllen, was äquivalent zu der Bedingung $ggT(m,n) = 1$ ist. Mit $q = -t$ ist $[s]_n$ demnach ein gesuchter Repräsentant. Die Anzahl der Elemente in der primen Restklassengruppe modulo n ist daher die Zahl der zu n teilerfremden Repräsentanten einer vollständigen Restklasse, also $\sum_{\substack{m=1 \\ ggT(m,n)=1}}^{n} 1$, was eine ganzzahlige Funktion definiert, die in (1.80) genauer beschrieben wird.

Wir haben gesehen, dass die Restklassennotation bei den Einheitswurzeln eine sinnvolle Bedeutung erlangt hat. Ein weiteres Beispiel, in welchem diese Restklassennotation von Bedeutung ist, ist der größte gemeinsame Teiler, denn der $ggT(m,n)$ hat die Eigenschaft n-periodisch in der Variable m zu sein (bzw. umgekehrt natürlich auch), da für $m = q \cdot n + r$ gilt:

$$ggT(r + q \cdot n, n) = ggT(r,n) \tag{1.32}$$

(BEWEIS: Wenn d die Zahl n teilt, dann sei dies mit $d|n$ bezeichnet. Da für jedes d gilt: $d|(r + q \cdot n) \wedge d|n \Leftrightarrow d|r \wedge d|n$ und daher auch für $d = ggT()$.) Letzteres ist auch die Grundlage für den euklidischen Algorithmus zu Berechnung des ggT, in welchem dieser Rechenschritt (wechselseitig) iteriert wird. Der ganzzahlge Anteil $q \cdot n$ ist also abermals uninteressant. In obig eingeführter Notation kann daher Gleichung (1.32) auch folgendermaßen angeschrieben werden:

$$ggT(r \,(\mathrm{mod}\, n), n) = ggT(r,n) \tag{1.33}$$

Diese Eigenschaft des ggT ist mit der Eigenschaft (1.28) der Einheitswurzeln:

$$e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot r \,(\mathrm{mod}\, n)}{n}} = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot r}{n}}$$

vergleichbar. Diese analogen Eigenschaften werden in diesem Skriptum eine große Rolle spielen.

Im kommenden Abschnitt beginnen wir zunächst mit einigen wichtigen Eigenschaften der Einheitswurzeln (1.22).

IV Diskrete Fourier Transformation (DFT)

Zunächst wollen wir die q-ten Potenzen einer beliebigen n-ten Einheitswurzel (1.22) über $0 \le q < n$ aufsummieren, d.h. wir untersuchen die folgende Summe:

$$\eta_n(m) := \sum_{q=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m}{n}} \right)^q = \sum_{q=0}^{n-1} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} \qquad m \in \mathbb{Z};\, n \in \mathbb{N}$$

Das Gleichheitszeichen folgt aus (1.19) mit $\varphi = \frac{2\cdot\pi\cdot m}{n}$. Wenn nun n ein Teiler von m ist (das Symbol dafür ist $n|m$), dann ist trivialerweise wegen (1.21) $\eta_n(m) = n$ andernfalls, d.h. wenn $n \nmid m$ erinnern wir uns an die geometrische Summenformel $\sum_{q=0}^{n-1} z^q = \frac{z^n - 1}{z - 1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ (Beweis durch Multiplizieren beider Seiten mit $z-1$ und anschließendem Vergleich). Es folgt daraus mit $z = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m}{n}}$ gleichfalls wegen (1.21): $\eta_n(m) = \left(e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot n}{n}} - 1 \right) / \left(e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m}{n}} - 1 \right) = 0$.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) war ein französischer Mathematiker und Physiker. Er beschäftigte sich unter anderem mit der Wärmeausbreitung in Festkörpern und entdeckte dabei die nach ihm benannten Fourierreihen.

Weiter stellen wir fest, dass für alle $m \in \mathbb{Z}$ die Summe auch verschoben werden kann ohne am Funktionswert etwas zu ändern:

$$\eta_n(m) = \sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} = \sum_{q=1}^{n} \overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}}} = \begin{cases} n & \text{für } n|m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall m \in \mathbb{Z};\, n \in \mathbb{N} \qquad (1.34)$$

da wegen (1.21): $e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot 0}{n}} = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot n}{n}} = 1$ gilt. Mit dem „Überstrich“ wurde die komplexe Konjugation notiert, also $\overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}}} = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot(-i)\cdot m\cdot q}{n}}$, die den Funktionswert gleichfalls nicht beeinflusst, da ja, wie soeben bewiesen $\eta_n(m) \in \mathbb{N}_0$, insbesondere also reell ist.

Nebenbemerkung: Für $m=0$ kann (1.34) auch so interpretiert werden, dass die Zahl 0 von jeder natürlichen Zahl geteilt wird, d.h. die Zahl 0 kann hinsichtlich der Teilbarkeit von keiner natürlichen Zahl an Größe übertroffen werden. Daher ist es auch sinnvoll für alle *n* aus den natürlichen Zahlen $ggT(n,0)=n$ und nicht 0 zu definieren.

$\eta_n(m)$	***n*=1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
***m*=0**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0
4	1	2	0	4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	5	0	0	0	0	0
6	1	2	3	0	0	6	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	7	0	0	0
8	1	2	0	4	0	0	0	8	0	0
9	1	0	3	0	0	0	0	0	9	0
10	1	2	0	0	5	0	0	0	0	10

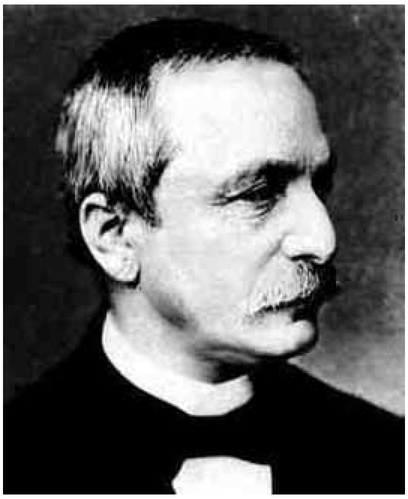
Tabelle 1: Einige Zahlenwerte der Funktion $\eta_n(m)$

Aus (1.34) folgt wegen (1.21) und (1.23) auch die in der Tab. 1 ersichtliche Periodizität von $\eta_n(m)$ in der Variable *m* mit der (kleinsten) Periode *n*:

$$\eta_n(k\cdot n+m)=\eta_n(m) \qquad \forall m,k\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N} \qquad (1.35)$$

denn $\eta_n(k\cdot n+m)=\sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot(k\cdot n+m)\cdot q}{n}} \overset{(1.23)}{=} \sum_{q=1}^{n} \underbrace{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot n\cdot q}{n}}}_{1}\cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}}=\eta_n(m)$

(Die Annahme es gäbe eine kleinere Periode als *n* führt sodann auf einen Widerspruch, wie der Leser sofort zeigen kann.)



Leopold Kronecker (1823-1891) war ein deutscher Mathematiker. Er lieferte grundlegende Beiträge zur Algebra und Zahlentheorie, aber auch zur Analysis und Funktionentheorie.

Mit der **Definition:** Kronecker Deltafunktion**:**

$$\delta_m(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } m=n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.36}$$

und der Einschänkung von m auf $0 \le m < n$ folgt aus (1.34):

$$\eta_n(m) = \sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} = \begin{cases} n & \text{für } n|m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = n\cdot\delta_0(m) \qquad 0 \le m < n;\ m,n \in \mathbb{N} \tag{1.37}$$

Statt der Einschränkung kann man diese Gleichung auch in der Restklassennotation aus Abschnitt III: $\eta_n(m) = n\cdot\delta_{[0]_n}([m]_n)$ schreiben.

Nun bilden wir analog (1.37) eine scheinbar kompliziertere Summe, nämlich die Summe des Produktes über ganzzahlige Potenzen zweier beliebiger n-ter Einheitswurzeln mit $0 \le m_1 - m_2 < n$ (was wegen (1.21) bzw. (1.35) oder genauer (1.26) keine Einschränkung ist) wobei eine davon komplex konjugiert wird, d.h. wir untersuchen die folgende Summe:

$$\sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_1\cdot q}{n}} \cdot \overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_2\cdot q}{n}}} \overset{(1.23)}{=} \sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot (m_1-m_2)\cdot q}{n}} \overset{(1.37)}{=} n\cdot\delta_0(m_1-m_2)$$
$$\forall m_1, m_2, n \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \le m_1 - m_2 < n$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt aus (1.23) und das zweite aus (1.37), wobei diese Gleichung in der Restklassennotation so aussieht: $\sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_1\cdot q}{n}} \cdot \overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_2\cdot q}{n}}} = n\cdot\delta_{[0]_n}([m_1]_n - [m_2]_n)$

Spätestens hier sollte klar geworden sein, dass (wie hier bei m_1 und m_2) die Restklassen-Eigenschaft modulo n der n-ten Einheitswurzeln eingegangen ist, auf die Restklassennotation wird aber im Folgenden verzichtet, der Leser sollte dies aber stets im Gedächtnis behalten.

Wir fassen dieses Ergebnis zusammen:

$$\frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_1\cdot q}{n}} \cdot \overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m_2\cdot q}{n}}} = \delta_0(m_1-m_2) \quad \forall m_1, m_2, n \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \le m_1 - m_2 < n \tag{1.38}$$

und versuchen nun das gewonnene Resultat zu verstehen. Dazu erinnern wir uns an die Vektorrechnung aus der Schule, speziell an die folgende Tatsache: Wenn zwei (hier n-dimensionale) Vektoren orthogonal (d.h. senkrecht) aufeinander stehen, dann ist deren inneres Produkt 0. Wir können also (1.38) dahingehend interpretieren, dass die Einheitswurzel-Vektoren

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot 1}{n}} \\ e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot 2}{n}} \\ \cdots\cdot \\ e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot n}{n}} \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

verschiedener n-ter Einheitswurzeln im Sinne (1.38) (was sich letztlich als ein Spezialfall des inneren Prdoduktes (1.42) herausstellen wird) paarweise aufeinender orthogonal stehen. Man sagt auch:

Die n-ten Einheitswurtzel-Vektoren (1.39) **bilden ein Orthonormalsystem.**

Ein Orthonormalsystem deshalb, weil die Länge der Vektoren (1.39) im Sinne von (1.38) auf 1 normiert sind, was ja aus (1.36) sofort ersichtlich ist. Diese n Vektoren $0 \le m < n$ spannen daher einen n-dimensionalen Raum auf (denn paarweise zueinander orthogonale Vektoren sind linear unabhängig).

In diesem Zusammenhang sei nun:

Definition: Diskrete Fouriertransformation (DFT):

DFT: $$\hat{a}(k) = \sum_{q=1}^{n} a(q) \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot q}{n}}} \qquad 1 \le k \le n \text{ mit } a(q) \in \mathbb{C} \qquad (1.40)$$

Daraus folgt aber:

Inverse DFT: $$a(q) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \hat{a}(m) \cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} \qquad 1 \le q \le n \qquad (1.41)$$

denn (1.40) $\hat{a}(m) = \sum_{k=1}^{n} a(k) \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}}$ in (1.41) eingesetzt ergibt:

$$a(q) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a(k) \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}} \cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} \overset{\substack{\text{Summen-}\\\text{vertauschung}}}{=} \sum_{k=1}^{n} a(k)\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}} \cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} = \sum_{k=1}^{n} a(k) \cdot \delta_0(q-k)$$

eine Identität, da die Summe ganz rechts wegen (1.36) geradewegs $a(q)$ ist. Das letzte Gleichheitszeichen folgt im Übrigen aus (1.38). Vollkommen analog folgt mit derselben Argumentation, wenn (1.41) in (1.40) eingesetzt wird:

$$\hat{a}(k) = \sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \hat{a}(m) \cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot q}{n}}} \overset{\substack{\text{Summen-}\\\text{vertauschung}}}{=} \sum_{m=1}^{n} \hat{a}(m) \cdot \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}} \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot q}{n}}} = \sum_{m=1}^{n} \hat{a}(m) \cdot \delta_0(m-k)$$

Mit anderen Worten: Die ursprünglichen Koeffizienten $a(q)$ mit $1 \le q \le n$ können wieder aus den transformierten (den so genannten Fourierkoeffizienten) $\hat{a}(k)$ mit $1 \le k \le n$ rekonstruiert werden und umgekehrt.

Das Skalarprodukt (innere Produkt) in dem Raum mit der Darstellung (1.40) ist

$$\langle a | b \rangle = \frac{1}{n} \cdot \sum_{m=1}^{n} \hat{a}(m) \cdot \overline{\hat{b}(m)} \qquad (1.42)$$

Wird etwa für $a(q)=\delta_q(k)$ gewählt, dann ist $\hat{\delta}_m(k)=\sum_{q=1}^{n}\delta_q(k)\cdot \overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot q}{n}}}=\overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}}$ bzw. $\overline{\hat{\delta}_m(l)}=e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot l}{n}}$ und damit $\langle\delta(k)|\delta(l)\rangle=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\hat{\delta}_m(k)\cdot\overline{\hat{\delta}_m(l)}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}}\cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot l}{n}}=\delta_0(l-k)$ wegen (1.38), also wie zuvor erwähnt ein Spezialfall des inneren Produktes (1.42). In (1.89) wird schließlich gezeigt, dass $\langle a|b\rangle=\sum_{k=1}^{n}a(k)\cdot\overline{b(k)}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\hat{a}(m)\cdot\overline{\hat{b}(m)}$ gilt, also dem Standardskalarprodukt $\langle a|b\rangle=\sum_{k=1}^{n}a(k)\cdot\overline{b(k)}$ in einem komplexen endlich dimensionalen Raum was letztlich die Schreibweise (1.42) rechtfertigt.

Nebenbemerkung: Im Hinblick auf den nächsten Abschnitt ist es zweckmäßig die DFT und inverse DFT wie hier angegeben zu definieren. In der überaus zahlreichen, auch (in der Medizin) anwendungsorientierten Literatur ist es hingegen eher üblich die Summen in (1.40) und (1.41) von 0 bis n-1 laufen zu lassen.

Auch sollte nicht zuletzt wegen (1.35) klar sein, dass in (1.40) mit der Variable k und in (1.41) mit q genau genommen Restklassen modulo n gemeint sind weshalb auch a_q bzw. $\hat{a}_k$ periodisch mit der Periode n fortgesetzt werden können.

Die Definition einer zahlentheortischen Funktion erfolgt im nächsten Abschnitt. Es liegt somit nahe nach bereits n-periodischen Funktionen $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ (d.h. sog. periodische zahlentheoretische Funktionen mit der Eigenschaft $f(k+n)=f(k)\quad\forall k\in\mathbb{N}$) Ausschau zu halten und diese mittels obiger DFT bzw. inverser DFT zu untersuchen.

Am Enden des Abschnitt III wurde der größte gemeinsame Teiler als eine periodische Funktion ausgewiesen, was aus der Gleichung (1.33), d.h. $ggT(r(\bmod n),n)=ggT(r,n)$ ersichtlich war. Dieselbe Eigenschaft haben folglich auch beliebige mit dem $ggT()$ zusammengesetzte Funktionen $f()$, sofern diese auf dem Wertebereich des $ggT()$ definiert sind:

$$f(ggT(r(\bmod n),n))=f(ggT(r,n))$$

Es bieten sich dafür zahlentheoretische Funktionen geradewegs an, insbesondere sind dann solche Funktionen in der Variablen r auch n-periodisch. Wir begeben uns also in die Zahlentheorie und schreiten zum nächsten Abschnitt.

V Zahlentheoretische Funktionen und Dirichlet-Produkt:

Zunächst einmal, was ist eine zahlentheoretische Funktion?

Definition: Eine zahlentheoretische Funktion $f(n)$ ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl n einen Funktionswert aus den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zuordnet, also $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$. Dazu einige Beispiele:

Beispiel 2) Die Funktion $\mathit{1}(n)$

ist die einfachste zahlentheoretische Funktion, denn sie ordnet jeder natürlichen Zahl n den Wert 1 zu, also:

$$\mathit{1}(n) := 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Bemerkung: Die Zahl 1 ist auch eine komplexe Zahl mit verschwindendem Imaginärteil.)

Beispiel 3) Teileranzahlfunktion $d(n)$:

Die Teileranzahlfunktion $d(n)$ gibt an, wie viele positive Teiler die Zahl n besitzt. Eine kompakte Schreibweise für $d(n)$ ist folgende Teiler-Summennotation:

$$d(n) = \sum_{d|n} 1$$

die andeuten soll, dass immer wenn ein $d \in \mathbb{N}$ die Zahl n (echt oder unecht) teilt (das Symbol dafür ist $d|n$) die Zahl 1 addiert wird.

Die Zahl 2 hat zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst – dies trifft auch für alle Primzahlen zu, also für $n = 2,3,5,7,11,..$ Die Zahl 4 hingegen hat 3 Teiler, nämlich 1, 2 und 4. Es gilt also:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Teiler von *n*	1	1,2	1,3	1,2,4	1,5	1,2,3,6	1,7	1,2,4,8	1,3,9	1,2,5,10
d(n)	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

Tabelle 2: Einige Zahlenwerte der Teileranzahlfunktion $d(n)$

Beispiel 4) Teilerfunktion $\sigma_z(n)$:

Die Teilerfunktion $\sigma_z(n)$ ordnet jeder Zahl n die Summe der z-ten Potenzen ihrer Teiler zu:

Mit der in Beispiel 3 eingeführten Summennotation:

$$\sigma_z(n) = \sum_{d|n} d^z \qquad z \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{N} \tag{1.43}$$

was auch hier andeuten soll, dass immer wenn ein $d \in \mathbb{N}$ die Zahl n (echt oder unecht) teilt über die z-ten Potenzen von d summiert werden soll. Also z.B.:

$$\sigma_2(4) = \sum_{d|4} d^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$$

bzw.

$$\sigma_3(6) = \sum_{d|6} d^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 6^3 = 252$$

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\sigma_0(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
$\sigma_1(n)=\sigma(n)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18
$\sigma_2(n)$	1	5	10	21	26	50	50	85	91	130
$\sigma_3(n)$	1	9	28	73	126	252	344	585	757	1144

Tabelle 3: Einige Zahlenwerte der Teilerfunktion $\sigma_z(n)$.

Bemerkung: Die Zeile $\sigma_0(n)$ in dieser Tab. 3 ist die Teileranzahlfunktion $\sigma_0(n) = \sum_{d|n} d^0 = \sum_{d|n} 1 = d(n)$ aus Beispiel 3 und ist folglich ein Spezialfall der Teilerfunktion (1.43) für $z = 0$ und in der Zeile 2 die Teilerfunktion $\sigma(n) := \sigma_1(n)$ schlechthin.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) war ein deutscher Mathematiker und arbeitete hauptsächlich auf den Gebieten der Analysis und der Zahlentheorie.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet hat in diesem Zusammenhang das nach ihm benannte Dirichlet-Produkt von zwei zahlentheoretischen Funktionen $f_1(n), f_2(n)$ definiert:

Definition Dirichlet-Produkt (auch als Dirichlet-Faltung oder lediglich als Faltung bezeichnet):

$$(f_1 * f_2)(n) := \sum_{d|n} f_1(d) \cdot f_2(n/d) = \sum_{d|n} f_1(n/d) \cdot f_2(d) = \sum_{\substack{d_1 \cdot d_2 = n \\ d_1, d_2 \in \mathbb{N}}} f_1(d_1) \cdot f_2(d_2) \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (1.44)$$

Analog zu obigem Beispiel erstreckt sich die linke Summe über alle (echten und unechten, positiven) Teiler d von n (wobei dann zwangsläufig die Koteiler n/d ebenso alle Teiler von n durchlaufen, weshalb die erste und zweite Summe ident ist). Die letzte Summe ist lediglich etwas symmetrischer notiert: Wenn d_1 die Teiler von n durchläuft, dann durchläuft d_2 die dazugehörigen Koteiler.

Wenngleich diese Definition etwas abstakt aussieht, zahlentheoretische Anwendungen werden sich im folgenden Abschnitt ergeben. Es ist aber leicht einzusehen, dass das Dirichlet-Produkt (1.44) wiederum eine zahlentheoretische Funktion ist. Aus der rechten Summe der Definition (1.44) ist überdies sofort ersichtlich, dass das Dirichlet-Produkt kommutativ:

$$\left(f_1 * f_2\right)(n) = \left(f_2 * f_1\right)(n) \qquad \forall\, f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

ist, und aus

$$\left(f_1 * f_2 * f_3\right)(n) = \sum_{\substack{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 = n \\ d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}}} f_1(d_1) \cdot f_2(d_2) \cdot f_3(d_3) \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.45}$$

(Beweis: Setze $f_2(n) = (g_2 * g_3)(n)$ in (1.44) ein und ersetze dann die $g's$ durch $f's$.)

kann die Assoziativität des Dirichlet-Produktes (die folglich aus der Assoziativität des gewöhnlichen Produktes folgt) abgelesen werden.

Beispiel 5) Das neutrale Element für die Dirichlet-Multiplikation:

Die Kronecker Deltafunktion $\delta_1(n)$ mit der bereits eingeführten Definition (1.36) ist ein Beispiel für eine sehr einfache zahlentheoretische Funktion, die nur die Werte 1 und 0 annimmt:

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.46}$$

Diese Funktion ist das neutrale Element (Einselement) für das Dirichlet-Produkt, denn wie sofort aus (1.44) folgt ist:

$$\left(f * \delta_1\right)(n) = \sum_{d|n} f(n/d) \cdot \delta_1(d) = f(n) \tag{1.47}$$

Sei andererseits $e(n)$ ein beliebiges anderes neutrales Element in der Menge der zahlentheoretischen Funktionen, dann muss für alle $f(n)$ gelten:

$$\left(f * e\right)(n) = \sum_{d|n} f(n/d) \cdot e(d) = f(n/1) \cdot e(1) + f(n/d_1) \cdot e(d_1) + \ldots + f(n/n) \cdot e(n) \overset{!}{=} f(n)$$

was nur möglich ist, wenn $e(n) = \delta_1(n)$ ist. Das Ausrufezeichen über dem Gleichheitszeichen bedeutet „soll gleich sein“.

Beispiel 6) Invertierbare zahlentheoretische Funktionen:

Difinition: Eine zahlentheoretische Funktionen $f(n)$ mit der Eigenschaft $f(1) \neq 0$ wird als invertierbare zahlentheoretische Funktion bezeichnet.

Es ist aus (1.44) sofort ersichtlich, dass das Dirichlet-Produkt zweier invertierbarer Funktionen genau dann invertierbar ist, wenn dies für beide Faktoren zutrifft:

$$\left(f_1 * f_2\right)(1) := \sum_{d|1} f_1(d) \cdot f_2(1/d) = \underbrace{f_1(1)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{f_2(1)}_{\neq 0} \neq 0$$

zumal kein Körper Nullteiler hat und daher auch nicht der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Wenn das Dirichlet-Produkt nicht invertierbar ist, dann ist zumindest einer der Faktoren nicht invertierbar. Der Name impliziert zudem die folgende (eindeutige) Eigenschaft:

Definition: Dirichlet-Inverse $f^{\underline{-1}}(n)$ einer zahlentheoretischen Funktion $f(n)$:

$$f^{\underline{-1}}(1) := \frac{1}{f(1)} \qquad f^{\underline{-1}}(n) := \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f^{\underline{-1}}(d) \cdot f(n/d) \quad \text{für } n>1 \tag{1.48}$$

(die Summe erstreckt sich über alle (echten und unechten) positiven Teiler d von n ausgenommen $d=n$). Die rekursive Definition (1.48) wurde so vorgenommen, dass $f^{\underline{-1}}(n)$ die Definitionsgleichung für die Inverse zum Dirichlet-Produkt erfüllt, d.h.

$$(f^{\underline{-1}} * f)(n) = \delta_1(n) \tag{1.49}$$

gilt, wobei $\delta_1(n)$ das neutrale Element (1.46) für das Dirichlet-Produkt ist.

Beweis: Es wird also gefordert, dass: $\left(f^{\underline{-1}} * f\right)(n) := \sum_{d|n} f^{\underline{-1}}(d) \cdot f(n/d) \overset{!}{=} \delta_1(n)$. Für n=1 folgt dann: $\sum_{d|1} f^{\underline{-1}}(d) \cdot f(1/d) = f^{\underline{-1}}(1) \cdot f(1) \overset{!}{=} \delta_1(1) = 1$ was nur möglich ist, wenn $f(1) \neq 0$ ist. Für n>1 muss dann $\sum_{d|n} f^{\underline{-1}}(d) \cdot f(n/d) = \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} f^{\underline{-1}}(d) \cdot f(n/d) + \underbrace{\sum_{\substack{d|n \\ d=n}} f^{\underline{-1}}(d) \cdot f(n/d)}_{f^{\underline{-1}}(n) \cdot f(1)} \overset{!}{=} \delta_1(n) = 0$ sein.

□

<u>**Notation:**</u> Um die Dirichlet-Inverse $f^{\underline{-1}}(n)$ nicht mit dem reziproken Wert $\frac{1}{f(n)}$ der Funktion $f(n)$ zu verwechseln, wird in diesem Skriptum der „Exponent" unterstrichen, denn $f^{\underline{-1}}(n) \neq \frac{1}{f(n)}$. In der math. wiss. Literatur wird auf diesen Unterstrich allerdings verzichtet.

Die invertierbaren zahlentheoretischen Funktionen bilden demnach mit dem Dirichlet-Produkt (1.44) und obiger Inversion (1.48) eine (unendlichdimensionale) abelsche Gruppe. Das neutrale Element dieser Gruppe ist $\delta_1(n)$ und die Assoziativität wurde mit (1.45) gezeigt.

Der Schritt zu einem Beweis, dass die zahlentheoretischen Funktionen mit dem Dirichlet-Produkt einen Integritätsring (in dem die soeben beschriebene abelsche Gruppe die so genannte Einheitengruppe ist) sowie eine kommutative Algebra bilden wäre jetzt nicht weit, wir benötigen diese Tatsache aber im weiteren Verlauf nicht.

Beispiel 7) Multiplikative zahlentheoretische Funktionen:

Definition: Eine nicht verschwindende zahlentheoretische Funktion f heißt multiplikativ, wenn für teilerfremde Zahlen m und n stets $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ gilt. Für teilerfremde Zahlen m und n gilt zwangsläufig $ggT(m,n) = 1$. Da 1 und n teilerfremd sind, gilt folglich $f(1 \cdot n) = f(1) \cdot f(n)$ für alle n für die $f(n)$ nicht verschwindet und daher ist $f(1) = 1$.

Für die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ folgt demnach induktiv:

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot f(p_2^{\alpha_2}) \cdots f(p_k^{\alpha_k}) =: \prod_{m=1}^{k} f(p_m^{\alpha_m}) \tag{1.50}$$

Eine nicht verschwindende multiplikative zahlentheoretische Funktion wird daher bereits durch ihre Werte auf den Primfaktorpotenzen $p_m^{\alpha_m}$ festgelegt, was daher gleichfalls als definierende Eigenschaft herangezogen werden kann, wenn (1.50) zur Definitionsgleichung erhoben wird. Insbesondere ist dann auch automatisch $f(1)=1$, denn (da ja $f(n)$ nicht verschwindend vorausgesetzt ist) gibt es ein *n* mit obiger Primzahlzerlegung, wobei $f(n)\neq 0$ ist und (da es unendlich viele Primzahlen gibt) eine Primzahl p_{k+1}, die in (1.50) nicht vorkommt (für die also $ggT(p_{k+1},n)=1$ gilt). Folglich gilt auch $f(n)=f(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}\cdot \underbrace{p_{k+1}^0}_{1})=\left(\prod_{m=1}^{k} f(p_m^{\alpha_m})\right)\cdot f(\underbrace{p_{k+1}^0}_{1})$ und der Vergleich mit (1.50) liefert daher $f(1)=1$.

Beispiel 8) Die Funktion n^z ist für alle $z\in\mathbb{C}$ multiplikativ:

Beweis: Für $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ ist $n^z=p_1^{\alpha_1\cdot z}\cdot p_2^{\alpha_2\cdot z}\cdots p_k^{\alpha_k\cdot z}=\prod_{m=1}^{k}\left(p_m^{\alpha_m}\right)^z$ und somit eindeutig durch ihre Werte auf den Primfaktorpotenzen von *n* festgelegt.

Die Funktion $\mathit{1}(n)$ aus dem Beispiel 2 ist somit multiplikativ (Beweis: setzte $z=0$) und die Identität $id(n):=n$ auch (Beweis: setzte $z=1$).

Beispiel 9) Die Kronecker Deltafunktion $\delta_1(n)$ ist multiplikativ:

Die Kronecker Deltafunktion $\delta_1(n)$ aus Beispiel 5 kann auch durch die Vorgabe der Werte auf den Primzalpotenzen $p^k:=\begin{cases}1 & \text{für } k=0\\ 0 & \text{für } \mathrm{k}\in\mathbb{N}\end{cases}$ für alle Primzahlen p festgelegt werden und erfüllt (1.50) wie ein einfaches Nachrechnen unmittelbar bestätigt, folglich ist $\delta_1(n)$ multiplikativ.

Das Dirichlet-Produkt zweier multiplikativer Funktionen f_1, f_2 ist multiplikativ (1.51)

denn für teilerfremde natürliche Zahlen *n₁, n₂*, d.h. $ggT(n_1,n_2)=1$ kann im Dirichlet-Produkt

$$\left(f_1 * f_2\right)(n_1\cdot n_2)=\sum_{d|n_1\cdot n_2} f_1(d)\cdot f_2\left(\frac{n_1\cdot n_2}{d}\right)$$

$d=d_1\cdot d_2$ mit $d_1,d_2\in\mathbb{N}$ und $ggT(d_1,d_2)=1$ so zerlegt werden, dass d_1 die Teiler von n_1 und d_2 die Teiler von n_2 durchläuft. Dann ist die Multiplikativität von f_1 und f_2 ausnützend:

$$\left(f_1 * f_2\right)(n_1\cdot n_2)=\underbrace{\sum_{d_1|n_1}\sum_{d_2|n_2}}_{\sum_{d_1\cdot d_2|n_1\cdot n_2}}\underbrace{f_1(d_1)\cdot f_1(d_2)}_{f_1(d_1\cdot d_2)}\cdot\underbrace{f_2\left(\frac{n_1}{d_1}\right)\cdot f_2\left(\frac{n_2}{d_2}\right)}_{f_2\left(\frac{n_1}{d_1}\cdot\frac{n_2}{d_2}\right)}=\left(f_1 * f_2\right)(n_1)\cdot\left(f_1 * f_2\right)(n_2)$$

demnach multiplikativ. Umgekehrt folgt aber nicht aus der Multiplikativität des Durichlet-Produktes, die Multiplikativität beider Faktoren, denn etwa $\delta_1(n) = \left(2 \cdot \delta_1 * \frac{\delta_1}{2}\right)(n)$ ist multiplikativ, aber beide Faktoren sind es nicht.

Ebenso gilt:

Die Dirichlet-Inverse $f^{-1}(n)$ einer multiplikativen Funktion $f(n)$ ist multiplikativ (1.52)

(Dieses Theorem wird im Folgenden nicht benötigt, der Beweis kann daher vom Leser auch übergangen werden.)
Zumal $f(n)$ als multiplikativ vorausgesetzt wurde und folglich $f(1) = 1 \neq 0$ ist, gibt es wegen (1.48) die Dirichlet-Inverse $f^{-1}(n)$. Speziell erfüllt $f^{-1}(n)$ für $n = 1$ die Kriterien der Multiplikativität, denn ebenso wegen (1.48) gilt $f^{-1}(1) = f(1) = 1$. Angenommen $f^{-1}(n)$ ist nicht multiplikativ, dann sei $n = n_1 \cdot n_2 > 1$ mit $ggT(n_1, n_2) = 1$ die kleinste natürliche Zahl für die $f^{-1}(n)$ nicht mehr multiplikativ ist, d.h. für die erstmalig

$$f^{-1}(n_1 \cdot n_2) \neq f^{-1}(n_1) \cdot f^{-1}(n_2) \qquad (1.53)$$

gilt, dann folgt mit zu obigem Beweis analoger Argumentation für d_1 und d_2 aus (1.48)

$$f^{-1}(n_1 \cdot n_2) = -\sum_{\substack{d \mid n_1 \cdot n_2 \\ d < n_1 \cdot n_2}} f^{-1}(n_1 \cdot n_2) \cdot f(n_1 \cdot n_2 / d) = -\underbrace{\underbrace{\sum_{d_1 \mid n_1} \sum_{d_2 \mid n_2}}_{\sum\limits_{d_1 \cdot d_2 \mid n_1 \cdot n_2}} \underbrace{f^{-1}(d_1) \cdot f^{-1}(d_2)}_{f^{-1}(d_1 \cdot d_2)} \cdot \underbrace{f(\frac{n_1}{d_1}) \cdot f(\frac{n_2}{d_2})}_{f(\frac{n_1}{d_1} \cdot \frac{n_2}{d_2})}}_{(f^{-1} * f)(n_1 \cdot n_2) \overset{\substack{\text{voraussetzungs} \\ \text{gemäß}}}{=} \delta_1(\underbrace{n_1 \cdot n_2}_{\neq 1}) = 0} + f^{-1}(n_1) \cdot f^{-1}(n_2) \cdot 1$$

ein Widerspruch zu der Annahme (1.53) wobei die Definitionsgleichung für die Inverse (1.49) benutzt wurde. Folglich gibt es keine kleinste natürliche Zahl n für die $f^{-1}(n)$ nicht multiplikativ ist womit das Theorem bewiesen ist.

Die multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen bilden daher eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren zahlentheoretischen Funktionen, selbstverständlich mit demselben neutralen Element $\delta_1(n)$ und auch die Assoziativität des Dirichlet-Produktes erbt diese Untergruppe von der Gruppe der invertierbaren zahlentheoretischen Funktionen.

Aus (1.52) folgt zwangsläufig auch:
Für eine invertierbare aber nicht multiplikative Funktion $f(n)$ hat deren Dirichlet-Inverse $f^{-1}(n)$ dieselben Eigenschaften, d.h. sie ist invertierbar aber nicht multiplikativ. (1.54)

Schließlich auch:
Das Dirichlet-Produkt $f(n) = (f_1 * f_2)(n)$ einer nicht multiplikativen Funktion $f_1(n)$ mit einer multiplikativen $f_2(n)$ ist nicht multiplikativ. (1.55)

Beweis: Wegen (1.52) ist $f_2^{-1}(n)$ multiplikativ und da $f_1(n) = (f * f_2^{-1})(n)$ nicht multiplikativ vorausgesetzt ist, kann wegen (1.51) $f(n)$ nicht multiplikativ sein.

Bemerkung: Sei $f(n) = (f_1 * f_2)(n)$ multiplikativ, dann zeigt Beispiel 6, dass beide Faktoren $f_1(n)$ und $f_2(n)$ invertierbar sein müssen. Sei nun $f_2(n)$ lediglich invertierbar aber nicht multiplikativ, dann trifft dies wegen (1.54) für $\overset{-1}{f_2}(n)$ ebenso zu und schließlich wegen (1.55) mit Beispiel 6: $f_1(n) = (f * \overset{-1}{f_2})(n)$ gleichfalls. Dennoch ist aber das Dirichlet-Produkt $\left((f * \overset{-1}{f_2}) * f_2\right)(n) = f(n)$ multiplikativ, wofür ja bereits zuvor das Beispiel $\left(2 \cdot \delta_1 * \dfrac{\delta_1}{2}\right)(n) = \delta_1(n)$ angegeben wurde. Wenn also $f(n) = (f_1 * f_2)(n)$ multiplikativ ist, dann folgt mit (1.51) und (1.55) diejenige beider Faktoren zugleich oder wenn einer der Faktoren nicht multiplikativ ist, dann ist es auch nicht der andere.

August Ferdinand Möbius (1790-1868) war ein deutscher Mathematiker und Astronom an der Universität Leipzig.

Beispiel 10) Möbiusfunktion $\mu(n)$:

Eine von Leonhard Euler implizit bereits 1748 verwendete jedoch erst von August Ferdinand Möbius im Jahr 1831 systematisch untersuchte Funktion, welche daher zu seinen Ehren als Möbiusfunktion $\mu(n)$ bezeichnet wird, ist durch Vorgabe der Werte für alle Primzahlpotenzen wie folgt festgelegt:

Definition: Möbiusfunktion $\mu(n)$:

$$\mu(p^k) := \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ -1 & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall p \in \boldsymbol{P} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.56}$$

und definitionsgemäß multiplikativ, d.h. für alle natürlichen Zahlen gemäß (1.50) festgelegt, wobei mit ***P*** die Menge der Primzahlen bezeichnet wurde.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
μ(n)	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Tabelle 4: Einige Zahlenwerte der Möbiusfunktion $\mu(n)$

Die Möbiusfunktion $\mu(n)$ hat die folgende wichtige Eigenschaft:

$$(\mu * \mathit{1})(n) = \delta_1(n) \tag{1.57}$$

d.h. die Dirichlet-Inverse von $\mathit{1}(n)$ ist $\mu(n)$ und umgekehrt. (Formal könnte man auch mit der in (1.49) gewählten Notation $\mathit{1}^{-1}(n) = \mu(n)$ schreiben, was aber in der Literatur unüblich ist.) Für den Beweis genügt es (1.57) nur für Primzahlpotenzen p^k zu zeigen, da $\mu(n)$ wie auch $\mathit{1}(n)$ (s. Beispiel 8) multiplikativ sind und folglich wegen (1.51) dies auch für die linke Seite zutrifft sowie wegen Beispiel 9 auch die rechte Seite multiplikativ ist:

$$(\mu * \mathit{1})(p^k) := \sum_{d|p^k} \mu(d) \cdot 1 = \begin{cases} \underbrace{\mu(1)}_{1} = 1 & \text{für } k = 0 \\ \underbrace{\mu(1)}_{1} + \underbrace{\mu(p)}_{-1} = 0 & \text{für } k = 1 \\ \underbrace{\mu(1)}_{1} + \underbrace{\mu(p)}_{-1} + \underbrace{\mu(p^2)}_{0} + \ldots + \underbrace{\mu(p^k)}_{0} = 0 & \text{für } k > 1 \end{cases}$$

wobei die Definition (1.56) wiederholt verwendet wurde.

Beispiel 11) Summatorische Funktion und die Möbius Inversion:

Definition: Eine Summe $G(n) = \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} 1 \cdot g(d) = \sum_{\substack{d_1 \cdot d_2 = n \\ d_1, d_2 \in \mathbb{N}}} \underbrace{\mathit{1}(d_1)}_{:=1} \cdot g(d_2) = (\mathit{1} * g)(n)$ wird in der Zahlentheorie auch als Summatorische von $g(n)$ bezeichnet.

Ganz rechts steht wieder die Kurzschreibweise für das Dirichlet-Produkt (1.44) der Funktionen $\mathit{1}(n)$ und $g(n)$.

Mit der Möbiusfunktion $\mu(n)$ kann aus der summatorischen Funktion $G(n)$ die Funktion $g(n)$ wieder rekonstruiert werden:

$$G(n) = (\mathit{1} * g)(n) \Leftrightarrow g(n) = (\mu * G)(n) \tag{1.58}$$

Der Beweis folgt durch Dirichletsche Multiplikation der Gleichung auf der linken Seite mit $\mu(n)$ zusammen mit (1.57) und der Tatsache, dass $\delta_1(n)$ das neutrale Element für das Dirichlet-Produkt ist. Die andere Richtung folgt analog durch dirichletsche Multiplikation der Gleichung auf der rechten Seite mit $\mathit{1}(n)$. Der Vorgang (1.58) in Richtung $\Rightarrow$ wird in der Literatur bisweilen als Möbius Inversion bezeichnet.

Eine summatorische Funktion haben wir bereits in (1.43) kennen gelernt, woraus sich folglich mit $g(n) = n^z$ aus (1.58):

$$n^z = (\mu * \sigma_z)(n) \qquad \forall z \in \mathbb{C};\ n \in \mathbb{N} \tag{1.59}$$

ergibt. Wegen (1.43) und (1.51) folgt auch die Multiplikativität der Teilerfunktion in der Variable n, denn:

$$\sigma_z(n) = \sum_{d|n} d^z = \sum_{d|n} 1 \cdot d^z = \sum_{d|n} \mathit{1} \cdot d^z = (\mathit{1} * \bullet^z)(n) \qquad (1.60)$$

und die Funktionen $\mathit{1}(n)$ wie auch n^z wurden im Beispiel 8 schon als multiplikativ ausgewiesen. Für die Teileranzahlfunktion aus Beispiel 3 als Spezialfall der Teilerfunktion für $z = 0$ folgt daher:

$$d(n) := \sigma_0(n) = \sum_{d|n} d^0 = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} \mathit{1} \cdot \mathit{1} = (\mathit{1} * \mathit{1})(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 12) Die Funktion $\eta_n(m)$:

Die in (1.34) eingeführte Funktion $\eta_n(m)$ fassen wir jetzt für jede ganze Zahl *m* als eine zahlentheoretische Funktion in der Variable *n* auf. Die Indexschreibweise ist historisch bedingt. Da, wie aus der rechten Seite in (1.34) sofort ersichtlich, ist $\eta_{n_1 \cdot n_2}(m) = \eta_{n_1}(m) \cdot \eta_{n_2}(m)$ für alle teilerfremden natürlichen Zahlen n_1, n_2 erfüllt (und folglich ist auch $\eta_1(m) = 1$). Die Funktion $\eta_n(m)$ ist demnach in der Variable *n* multiplikativ. Theoretisch genügt es daher $\eta_n(m)$ für Primzahlpotenzen p^α zu berechnen:

$$\eta_{p^\alpha}(m) = \begin{cases} p^\alpha & \text{für } p^\alpha \,|\, m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (1.61)$$

Sei in der Restklassennotation von (1.37) $m = k \cdot n$ gesetzt, also $\eta_n(k \cdot n) = n \cdot \delta_{[0]_n}([k \cdot n]_n)$ dann folgt:

$$\eta_n(k \cdot n) = n =: id(n) \qquad \forall k \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \qquad (1.62)$$

da $n \,|\, k \cdot n$ für alle natürlichen Zahlen *n* und alle ganzen Zahlen *k* erfüllt ist. Weiter auch:

$$\eta_n(k \cdot n \pm 1) = \delta_1(n) \qquad \forall k \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \qquad (1.63)$$

da für alle ganzen Zahlen *k* keine natürliche Zahl außer $n = 1$ die Bedingung $n \,|\, (k \cdot n \pm 1)$ erfüllt.

Beispiel 13) Ramanujansummen $c_n(m)$:

Der größte gemeinsame Teiler $ggT : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ ist, wie in der Einleitung erwähnt, eine Funktion zweier ganzer Zahlen in die natürlichen Zahlen einschließlich 0 bzw. wie sofort ersichtlich, ist $ggT : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Die Zusammensetzung einer zahlentheoretischen Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit dem $ggT()$ ist demnach eine Funktion $g(ggT()) : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, so etwa die Zusammensetzung der Kronecker Deltafunktion $\delta_1(n)$ mit dem $ggT()$ und kann daher (wenn eines der beiden Argumente festgehalten wird) als Koeffizienten für eine diskrete Fouriertransformation (1.40) herhalten:

$$c_n(m) := \sum_{k=1}^{n} \delta_1(ggT(k,n)) \cdot e^{\overline{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot m \cdot k}{n}}} = \sum_{\substack{k=1 \\ ggT(k,n)=1}}^{n} e^{\overline{\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot m \cdot k}{n}}} \qquad \forall m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N} \qquad (1.64)$$

Der indische Mathematiker Srinivasa Ramanujan hat von diesen und demnach zu seinen Ehren als Ramanujansummen bezeichneten Summen $c_n(m)$ ab 1916 intensiv Gebrauch gemacht [4], Kluyver [5] hat ähnliche Summen jedoch zuvor bereits verwendet. Es wird sich in Beispiel 15 zeigen, dass $c_n(m)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ nur Werte aus $\mathbb{Z}$ annimmt, auf die komplexe Konjugation in (1.64) kann daher $\forall m \in \mathbb{Z}$ verzichtet werden.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) war ein indischer Mathematiker und ist vor allem dafür bekannt, sich all sein Wissen autodidaktisch beigebracht zu haben.

Am Enden des Abschnitt IV wurden Funktionen des größte gemeinsame Teiler als n-periodisch ausgewiesen, d.h. $f(ggT(r(\bmod n), n)) = f(ggT(r, n))$ und haben dort bereits vermutet, dass n-periodische Funktionen für die diskrete Fouriertransformation interessant sein könnten. Im nächsten Abschnitt wollen wir daher die Kronecker Deltafunktion $\delta_1(n)$ in (1.64) auf beliebige zahlentheoretische Funktion ausdehnen. In gewissem Sinn ist diese Vorgangsweise im folgenden Abschnitt auch als eine Verallgemeinerung der Ramanujansummen $c_n(m)$ (1.64) zu verstehen.

VI Fouriertransformation von Funktionen des größten gemeinsamen Teilers.

Wie bereits erwähnt und auch aus der Kapitel-Überschrift hervorgeht, soll in diesem Abschnitt die diskrete Fouriertransformation einer beliebigen zahlentheoretischen Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ des größten gemeinsamen Teilers untersucht werden. Speziell wollen wir die folgende Identität beweisen:

Fouriertransformation von Funktionen des größten gemeinsamen Teilers:

$$\sum_{k=1}^{n} f(ggT(k,n))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}} = \sum_{d|n} f(n/d)\cdot c_d(m) = (f * c_\bullet(m))(n) \qquad (1.65)$$

(Bemerkung: auf der rechten Seite steht lediglich wieder die Kurzschreibweise für das Dirichlet-Produkt (1.44) in der Mitte wobei die Summen-Variable in diesem Dirichlet-Produkt mit einem • angedeutet wurde.) Die Ramanujanschen Summen $c_n(m)$ werden hier (wieder aus historischen Gründen in der Indexschreibweise) als zahlentheoretische Funktion in der Variable n aufgefasst. (Die Summe auf der linken Seite von (1.65) kann selbstverständlich auch über ein beliebiges vollständiges Restsystem mod n laufen.)

Der Beweis von (1.65) folgt der Publikation [1]. Wir benützen die im Abschnitt III eingeführte Restklassenarithmetik, bzw. Kongruenzrelation.

Vorerst halten wir fest, dass die Zusammensetzung $f(ggT(k,n))$ für alle $k\in\mathbb{Z}$ erlaubt ist, da stets $n\neq 0$ ist. Wir setzen nun zunächst für $f(n)$ die in (1.36) definierte Kroneckersche Deltafunktion $\delta_j(n)$ in (1.65) ein. Für ein $n\equiv 0(j)\Leftrightarrow n=q\cdot j$ folgt dann aus der linken Seite:

$\sum_{k=1}^{q\cdot j}\delta_j(ggT(k,q\cdot j))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{q\cdot j}}} = \sum_{k=1}^{q}\delta_j(ggT(k\cdot j,q\cdot j))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k\cdot j}{q\cdot j}}}$ da stets $j\neq ggT(k\cdot j\pm l,q\cdot j)$ für $1\le l<j$ ist und schließlich wegen der distributiven Eigenschaft des größten gemeinsamen Teilers: $ggT(k\cdot j,n\cdot j)=j\cdot ggT(k,n)$ folgt daraus weiter:

$\sum_{k=1}^{q}\delta_j(j\cdot ggT(k,q))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{q}}} = \sum_{k=1}^{q}\delta_1(ggT(k,q))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{q}}} = c_q(m) = c_{n/j}(m)$, wobei die Definition (1.64) verwendet wurde. Für den Fall $n\not\equiv 0(j)$ ist es aber offensichtlich, dass

$\sum_{k=1}^{n}\delta_j(ggT(k,n))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}} = 0$ ist und da das Dirichlet-Produkt von $\delta_j(n)$ mit einer beliebigen zahlentheoretischen Funktion $g(n)$ stets:

$$(\delta_j * g)(n) = \sum_{d|n}\delta_j(d)\cdot g(n/d) = \begin{cases} g(n/j) & \text{für } n\equiv 0(j) \\ 0 & \text{für } n\not\equiv 0(j)\end{cases} \qquad (1.66)$$

ergibt, folgt daraus (durch Vergleich) das Zwischenresultat:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_j(ggT(k,n))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}} = \left(\delta_j * c_\bullet(m)\right)(n) \qquad (1.67)$$

Sei nun $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ eine beliebige zahlentheoretische Funktion. Die Multiplikation von (1.67) mit $f(j)$ und Aufsummieren über $1\le j\le n$ ergibt sodann wegen $\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j(q)\cdot f(j)=f(q)$ nach Summenvertauschung (der endlichen Summen) auf beiden Seiten von (1.67) die Identität (1.65) womit (1.65) für alle $m\in\mathbb{Z}$ bewiesen ist. (Man könnte annehmen, dass nur ein Aufsummieren über $1\le j\le\infty$ das korrekte Resultat liefert, aber es genügt deshalb lediglich die Summierung über $1\le j\le n$ zu erstrecken, da $1\le ggT(k,n)\le n$ und auch das Argument von δ_j auf der rechten Seite von (1.67) wegen (1.44) stets zwischen 1 und *n* bleibt.)

Demnach kann die zahlentheoretische Funktion $(f*c_\bullet(m))(n)$ für alle $m\in\mathbb{Z}$ auch als Fourierkoeffizient der zahlentheortischen Funktion $f(ggT(k,n))$ aufgefasst werden.

Weiter sei noch festgehalten, dass (1.65) wegen (1.21) und (1.23) in der Variable *m* periodisch mit der Periode *n* ist und die Summe der linken Seite über eine Periode etwa über $1\le m\le n$

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(ggT(k,n))\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}} \overset{\substack{\text{Summen-}\\ \text{vertauschung}}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(ggT(k,n))\cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{n} e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}}}_{\eta_n(k)=\begin{cases} n & \text{für } n|k \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}} = f(\underbrace{ggT(n,n)}_{n})\cdot n$$

ergibt, wobei in der Mitte (1.34) verwendet wurde. Folglich liefert auch die Summe über die rechte Seite von (1.65) dasselbe Resultat:

$$\sum_{m=1}^{n}(f*c_\bullet(m))(n)=n\cdot f(n) \qquad (1.68)$$

Aus (1.41) folgt schließlich die

Inverse Fouriertransformation von Funktionen des größten gemeinsamen Teilers :

$$f(ggT(k,n))=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\big(f*c_\bullet(m)\big)(n)\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}} \qquad \forall k\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N} \qquad (1.69)$$

Beispiel 14) Weitere Eigenschaften Ramanujanscher Summen $c_n(m)$:

Wird nun $f(n)=\mathit{1}(n):=1$ in (1.65) eingesetzt, dann folgt mit (1.34) und Beispiel 11 daraus:

$$\eta_n(m)=\sum_{d|n}c_d(m)=(\mathit{1}*c_\bullet(m))(n) \qquad \forall m\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N} \qquad (1.70)$$

eine summatorische Funktion und folglich mit (1.58):

$$c_n(m)=(\mu*\eta_\bullet(m))(n) \qquad \forall m\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N} \qquad (1.71)$$

womit nebenbei wegen (1.51) und Beispiel 10 wie auch Beispiel 12 die Multiplikativität von $c_n(m)$ in der Variable *n* folgt. Mit (1.61) und (1.56) folgt sodann für Primzahlpotenzen p^α:

$$c_{p^\alpha}(m) = \sum_{d|p^\alpha} \eta_{p^\alpha/d}(m)\cdot\mu(d) = \eta_{p^\alpha}(m) - \eta_{p^{\alpha-1}}(m) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p^{\alpha-1} \nmid m \\ -p^{\alpha-1} & \text{falls } p^{\alpha-1} | m \text{ und } p^\alpha \nmid m \\ p^\alpha - p^{\alpha-1} & \text{falls } p^\alpha | m \end{cases} \tag{1.72}$$

Aus der Periodizität von $\eta_n(m)$ in der Variable m mit der Periode n folgt schließlich auch diejenige von $c_n(m)$. Die triviale Summe über eine Periode $\sum_{m=1}^{n} \eta_n(m) = n$ ergibt sich auch aus (1.68) zusammen mit (1.70) für $f(n) = 1(n)$.

Weiters folgt aus (1.71) wegen (1.34): $\eta_n(m) = \eta_n(-m)$ auch:

$$c_n(m) = c_n(-m) \tag{1.73}$$

d.h. eine Symmetrie um $m = 0$. Für $m = k\cdot n \pm 1$ folgt nun aus (1.63) mit (1.71)

$$c_n(k\cdot n \pm 1) = (\mu * \underbrace{\eta_\bullet(k\cdot\bullet \pm 1)}_{\delta_1})(n) = \mu(n) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \tag{1.74}$$

und für $m = k\cdot n$ aus (1.71) wegen (1.62), d.h. $\eta_n(k\cdot n) = id(n)$:

$$c_n(k\cdot n) = (\mu * \underbrace{\eta_\bullet(k\cdot\bullet)}_{id})(n) = (\mu * id)(n) := \varphi(n) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \tag{1.75}$$

eine Identität zu einer der definierenden Eigenschaften der Eulerschen Phifunktion:

Definition: Eulersche Phifunktion: $\varphi(n) := (\mu * id)(n)$ (1.76)

Beispiel 15) Eigenschaften der Eulersche Phifunktion $\varphi(n)$:

Selbstverständlich ist wegen (1.44) der Wertebereich von $\varphi(n)$ stets eine ganze Zahl, da dies ja sowohl für $\mu(n) \in \{-1,0,1\}$ wie auch $id(n) := n$ zutrifft, womit überdies wegen (1.51) mit Beispiel 8 (für $z = 1$) sowie Beispiel 10 die Multiplikativität von $\varphi(n)$ gezeigt ist. Es genügt also wegen Beispiel 7 die Eulersche Phifunktion lediglich für die Primzahlpotenzen von $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ auszurechnen:

$$\varphi(p^\alpha) = (id * \mu)(p^\alpha) := \sum_{d|p^\alpha} id(p^\alpha/d)\cdot\mu(d) = \frac{p^\alpha}{1}\cdot 1 + \frac{p^\alpha}{p}\cdot(-1) + 0 + .. + 0 = p^\alpha\cdot(1-\frac{1}{p})$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen aus der Definition für die Möbiusfunktion (s. Beispiel 10) folgt, woraus dann mit (1.50)

$$\varphi(n) = n\cdot\prod_{\substack{p|n \\ p\in P}} (1-\frac{1}{p}) \tag{1.77}$$

resultiert. Mit ***P*** wurde wieder die Menge der Primzahlen bezeichnet. Z.B:

$$\varphi(6) = 6\cdot\prod_{\substack{p|6 \\ p\in P}} (1-\frac{1}{p}) = 6\cdot(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3}) = 2$$

$$\varphi(9) = 9 \cdot \prod_{\substack{p|9 \\ p\in P}} (1-\frac{1}{p}) = 9 \cdot (1-\frac{1}{3}) = 6$$

Bereits aus (1.77) folgt schon, dass $\varphi(n)$ nur noch natürliche Zahlen annehmen kann. In den folgenden Zeilen wird dies aber unmittelbar zu sehen sein, da sich $\varphi(n)$ als eine Anzahl herausstellen wird.

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\boldsymbol{\varphi(n)}$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

Tabelle 5: Einige Zahlenwerte der Eulerschen Phifunktion $\varphi(n)$

Sei nun in (1.75) $k = 0$ gewählt, d.h.

$$c_n(0) = (\mu * \underbrace{\eta_\bullet(0)}_{id})(n) = \varphi(n) \tag{1.78}$$

(vgl. dazu auch Tab. 5 mit der Zeile *m*=0 in der folgenden Tab. 6)

dann folgt eine seit langem bekannte Identität zwischen den Ramanujanschen Summen und der Eulerschen Phifunktion und daraus mit (1.65), wenn dort $m = 0$ gewählt wird, eine bereits im Jahr 1885 von Cesàro [6] publizierte Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} f(ggT(k,n)) = (f * \varphi)(n) \tag{1.79}$$

Für $f = id(n) := n$ ergibt diese die so genannte Pillai-Funktion $\sum_{k=1}^{n} ggT(k,n) = (id * \varphi)(n)$, die wegen (1.51) und Beispiel 8 (setze dort $z = 1$) auch multiplikativ ist.

Für die Funktion $f(n) = \delta_1(n)$ folgt nun aus (1.79) die üblicherweise in der elementaren Zahlentheorie so (äquivalent) definierte Gleichung für die Eulersche Phifunktion:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \delta_1(ggT(k,n)) = \sum_{\substack{k=1 \\ ggT(k,n)=1}}^{n} 1 \tag{1.80}$$

also die Anzahl der zu *n* teilerfremden Zahlen aus der Menge $\{1,2,...,n\}$. Diese Funktion $\varphi(n)$ wurde auch letztlich von Leonhard Euler im Jahr 1760 genau so in die Zahlentheorie eingeführt: „… aequalis sit multitudini numerorum ipso n minorum, qui simul ad eum sint primi, …“ [7]. Gleichung (1.80) liefert mit der Rechenregel (1.33) überdies eine Antwort auf die am Ende des Abschnitts 3 gestellte Frage, wie viele Elemente die prime Restklassengruppe modulo *n* hat.

In gewisser Weise kann man (1.64) auch als eine Verallgemeinerung der Eulerschen Phifunktion (1.80) auffassen.

Abermals das Beispiel für $n = 6$:

$$\varphi(6) = \sum_{\substack{k=1 \\ ggT(k,6)=1}}^{n} 1 = 2$$

da lediglich die Zahlen $k=1$ und 5 zu der Zahl 6 teilerfremd sind, d.h. der Bedingung $ggT(k,6)=1$ gehorchen.

Gleichung (1.80) erlaubt auch die Ramanujansummen (1.64) sogar für alle $m \in \mathbb{R}$ abzuschätzen:

$$|c_n(m)| \le \sum_{k=1}^{n} \delta_1(ggT(k,n)) \cdot \underbrace{\left| e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}} \right|}_{1} \overset{(1.80)}{=} \varphi(n)$$

Aus (1.76) mit (1.58) folgt auch eine Gleichung

$$(1*\varphi)(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

die C.F. Gauss bereits im Jahr 1801 im Artkel 39 seiner Disquisitiones Arithmeticae [8] gezeigt hat und dort das Beispiel für $n=30$ angegeben hat. Wir begnügen uns mit $n=6$, was mit Tab. 5

$$\sum_{d|6} \varphi(d) = \varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6) = 1+1+2+2 = 6$$

das erwartete Ergebnis liefert.

Wie in Beispiel 10 gezeigt, nimmt $\eta_n(m)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ und wie aus der Definition (1.56) ersichtlich, nimmt die Möbiusfunktion nur Werte aus {-1,0,1} an. Es folgt daher aus (1.71) mit (1.44), dass auch die Ramanujansummen $c_n(m)$ nur Werte aus $\mathbb{Z}$ annehmen können:

$c_n(m)$	***n*=1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
***m*=0**	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4
1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1
2	1	1	-1	-2	-1	-1	-1	0	0	-1
3	1	-1	2	0	-1	-2	-1	0	-3	1
4	1	1	-1	2	-1	-1	-1	-4	0	-1
5	1	-1	-1	0	4	1	-1	0	0	-4
6	1	1	2	-2	-1	2	-1	0	-3	-1
7	1	-1	-1	0	-1	1	6	0	0	1
8	1	1	-1	2	-1	-1	-1	4	0	-1
9	1	-1	2	0	-1	-2	-1	0	6	1
10	1	1	-1	-2	4	-1	-1	0	0	4

Tabelle 6: Einige Zahlenwerte der Ramanujansummen $c_n(m)$

Aus der Tab. 6 ist auch die Periodizität von $c_n(m)$ in der Variable *m* mit der Periode *n* ersichtlich und ausgenommen in der Spalte $n=1$ verschwindet wegen (1.68) mit $f(n)=\delta_1(n)$ die Summe über eine Periode. Die Tab. 6 kann wegen (1.73) auch (nach oben) symmetrisch um $m=0$ zu den negativen ganzen Zahlen fortgesetzt werden und wegen (1.74) findet sich in der Tab. 6 sowohl die Möbiusfunktion $\mu(n)$ wie auch wegen (1.75) die Eulersche Phifunktion $\varphi(n)$ in unendlich vielen „schrägen Diagonalen“ wieder.

Da $c_n(m) \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N};\, m \in \mathbb{Z}$ somit reell ist, hat die komplexe Konjugation für reellwertige Funktionen $f(n)$ auf die rechte Seite von (1.65) folglich keinen Einfluss, weshalb die komplexe Konjugation auch auf die linke Seite ebenso keine haben kann. Es folgt also:

$$\sum_{k=1}^{n} f(ggT(k,n)) \cdot e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}} = (f * c_{\bullet}(m))(n) \qquad \forall f:\mathbb{N}\to\mathbb{R};\, m\in\mathbb{Z} \qquad (1.81)$$

Mit analoger Argumentation gilt gleichfalls für (1.69):

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \big(f * c_{\bullet}(m)\big)(n) \cdot e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}} = f(ggT(k,n)) \qquad \forall f:\mathbb{N}\to\mathbb{R};\, k\in\mathbb{Z} \qquad (1.82)$$

Bemerkung: In (1.69) bzw. (1.82) kann $f(n)$ selbstverständlich auch auf einer Obermenge der natürlichen Zahlen, etwa auf $[1,\infty]$ bzw. auch auf $\mathbb{C}$ definiert sein.

Beispiel 16) Der größte gemeinsame Teiler ist eine Folge ganzer Funktionen:

Für die Identität $f(n) = id(n) := n$ folgt aus (1.82)

Der größte gemeinsame Teiler ist eine Folge ganzer Funktionen:

$$ggT(z,n) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\big(id * c_{\bullet}(m)\big)(n)\cdot e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot z}{n}} = \sum_{m=1}^{n} e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot z}{n}} \cdot \sum_{d|n} \frac{c_d(m)}{d} \qquad (1.83)$$

eine Gleichung für den größten gemeinsamen Teiler, die zunächst für alle $z\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ aber offensichtlich auch für alle $z\in\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$ ausgewertet werden kann.

Die Exponentialfunktion (1.3) ist wohl eine der bekanntesten ganzen Funktionen und endliche Summen ganzer Funktionen sind zwangsläufig wieder ganz, folglich ist (1.83) sogar eine Folge ganzer Funktionen, womit die Aussage in der Überschrift dieses Skriptums bewiesen ist. Es sei aber darauf hingewiesen, dass (1.83) nicht eindeutig ist, denn die Addition von z.B. $a\cdot\sin(\pi\cdot z)$ für ein beliebiges $a\in\mathbb{C}$ ändert sowohl die Eigenschaft „ganze Funktion“ wie auch die Eigenschaft $ggT()$ für alle $z\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ nicht.

Bemerkung: Es gilt $ggT(z,n) = ggT(z+k\cdot n, n)$ für alle $k\in\mathbb{Z}$, d.h. (1.83) ist in der komplexen Variable z selbstverständlich weiterhin n-periodisch.

Für $z=0$ folgt aus (1.83) $ggT(0,n) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\big(id * c_{\bullet}(m)\big)(n)$ und daraus mit (1.68) für $f = id$ $ggT(0,n) = n$, d.h. die Zahl 0 wird von jeder natürlichen Zahl geteilt. Wie am Beginn des Kap. IV bereits bemerkt, wird also die Zahl 0 hinsichtlich der Teilbarkeit von keiner natürlichen Zahl an Größe übertroffen.

Beispiel 17) Der größte gemeinsame Teiler von ½ und 3 sowie die q-te Ableitung und das (unbestimmte) Integral des größten gemeinsamen Teilers:

Die in der Einleitung gestellten Fragen können daher nunmehr leicht beantwortet werden:

$$ggT(\frac{1}{2},3)=\sum_{m=1}^{3}e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot(1/2)}{3}}\cdot\sum_{d|3}\frac{c_d(m)}{d}=\underbrace{e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i}{6}}}_{\frac{1}{2}\pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{2}{3}+\underbrace{e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot 2\cdot i}{6}}}_{-\frac{1}{2}\pm i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{2}{3}+\underbrace{e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot 3\cdot i}{6}}}_{-1}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{5}{3}\pm\frac{2\cdot i}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{d^q}{dz^q}ggT(z,n)=\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{d^q}{dz^q}e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot z}{n}}\right)\cdot\sum_{d|n}\frac{c_d(m)}{d}=\left(\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i}{n}\right)^q\cdot\sum_{m=1}^{n}m^q\cdot e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot z}{n}}\cdot\sum_{d|n}\frac{c_d(m)}{d}$$

$$\int ggT(z,n)\,dz=\frac{\pm n}{2\cdot\pi\cdot i}\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot z}{n}}}{m}\cdot\sum_{d|n}\frac{c_d(m)}{d}+C \qquad \text{mit } C\in\mathbb{C} \text{ beliebig}$$

wobei (1.12) verwendet wurde. Man überzeugt sich leicht, dass alle Ableitungen wie auch das Integral erneut n-periodisch sind, d.h.: $\frac{d^q}{dz^q}ggT(z,n)=\frac{d^q}{dz^q}ggT(z+n\cdot k,n)$ für alle $k\in\mathbb{Z}$ sowie $\int_u^{u+n} ggT(z,n)\,dz=0$ für alle $u\in\mathbb{C}$ gilt.

Das eingangs erwähnte Beispiel $ggT(i,7)$ sei dem Leser überlassen.

Da der größte gemeinsame Teiler für ganze Zahlen stets wiederum eine ganze Zahl und damit reel ist und der Realteil einer ganzen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist kann aus (1.83) auch eine steige reele Funktion für alle $x\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ angegeben werden, nämlich $\Re e(ggT(x,n))$.

Das Skriptum könnte als hier enden, aber aus (1.65) und (1.69) lassen sich weitere auch bereits seit Jahrzehnten bekannte Resultate gewinnen. Unter anderem sollen einige davon im nächsten Abschnitt beleuchtet werden.

VII Weitere Anwendungen für Ramanujansummen bzw. die diskrete Fouriertransformation des größten gemeinsamen Teilers.

In diesem Kapitel werden zunächst einige Beispiele and Anwendungen für (1.81) und (1.82) diskutiert, so etwa auch das Theorem von Parseval für diskrete Fouriertransformationen des größten gemeinsamen Teilers.

Beispiel 18) Eine bekannte Identität $\mu(n) = c_n(1)$:

Wird in (1.74) $k = 0$ gewählt, dann folgt daraus die Identität:

$$\mu(n) = c_n(1) = \sum_{\substack{k=1 \\ ggT(k,n)=1}}^{n} \overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k}{n}}} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.84}$$

(vgl. dazu auch Tab. 4 mit der Zeile $m = 1$ in der Tab. 6)

Beispiel 19) Eigenschaften des Einheitselementes $\delta_1(n)$:

Wird nun in (1.65) $m = q \cdot n \pm 1$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $f(n) = 1(n) := 1$ gewählt, dann folgt daraus mit (1.57) und (1.74) eine Beziehung zum multiplikativen Einheitselement:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot(q\cdot n\pm 1)}{n}}} = (1 * \underbrace{c_\bullet(q\cdot\bullet\pm 1)}_{\mu})(n) = \delta_1(n)$$

und speziell mit (1.21):

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot k}{n}} = \delta_1(n)$$

eine ebenso bekannte Gleichung, die auch geometrisch leicht zu interpretieren ist, denn die (vektorielle) Summe aller n-ten Einheitswurzeln muss (außer für $n = 1$) aus Symmetriegründen [s. Abb. 1] verschwinden.

Beispiel 20) Weitere Eigenschaften der Eulerschen Phifunktion $\varphi(n)$:

Sei nun $f(n) = id(n) := n$ und $m = 1$ in Gleichung (1.81) gewählt, dann folgt mit (1.84):

$$\sum_{k=1}^{n} ggT(k,n) \cdot e^{\frac{\pm 2\cdot\pi\cdot i\cdot k}{n}} = (id * c_\bullet(1))(n) = (id * \mu)(n) := \varphi(n) \tag{1.85}$$

eine Identität zur Eulersche Phifunktion $\varphi(n)$. Da die Eulersche Phifunktion nur reelle Werte annimmt, muss folglich der Imaginärteil auf der linken Seite von (1.85) verschwinden. Es folgt daher mit (1.5) aus (1.85):

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} ggT(k,n) \cdot \cos(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{n}) \tag{1.86}$$

Etwa wieder für $n = 6$:

$$\varphi(6)=\sum_{k=1}^{n} ggT(k,6)\cdot\cos(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{6})=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{-1}{2}+3\cdot(-1)+2\cdot\frac{-1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}+6\cdot 1=2$$

Beispiel 21) Weitere Eigenschaften der Teilerfunktion $\sigma_z(n)$:

Sei nun $f(n)=\sigma_z(n)$ die in (1.43) definierte Teilerfunktion für ein $z\in\mathbb{C}$ dann folgt aus (1.65) für $m=1$ mit (1.84) und (1.59):

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_z(ggT(k,n))\cdot\overline{\left(e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i}{n}}\right)^{k}}=\left(\sigma_z * c_\bullet(1)\right)(n)\overset{(1.84)}{=}\left(\sigma_z*\mu\right)(n)\overset{(1.59)}{=}n^z \qquad (1.87)$$

bzw. mit (1.19) für ein $z\in\mathbb{R}$ und Spaltung mit (1.5) in Real- und Imaginärteil:

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_z(ggT(k,n))\cdot\cos(2\pi k/n)=n^z$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_z(ggT(k,n))\cdot\sin(2\pi k/n)=0$$

Etwa für n=6 und z=2: $\sum_{k=1}^{6}\sigma_2(ggT(k,6))\cdot\cos(\frac{2\pi k}{6})=1\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{-1}{2}+10\cdot(-1)+5\cdot\frac{-1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}+50\cdot 1=6^2$

Mehrere weitere Beispiele für (1.81) und (1.82) aus denen auch trigonometrische Relationen folgen finden sich in [1]. Ein in [9] publiziertes Beispiel soll allerdings dennoch vorgestellt werden, dazu die:

Definition: Das n-te Kreisteilungspolynom (engl.: cyclotomic polynomial) ist dasjenige ganzzahlige Polynom größten Grades mit Leitkoeffizient 1, das x^n-1 teilt, jedoch zu allen x^d-1 mit $d<n$ teilerfremd ist.

Beispiel 22) Eine alternative Produktdarstellung für die Kreisteilungspolynome:

Sei $\Phi_d(x)$ das d-te Kreisteilungspolynom, dann gilt bekanntlich

$$(x^n-1)=\prod_{d|n}\Phi_d(x) \qquad (1.88)$$

In [9] wird (mit den auch in diesem Skriptum hergeleiteten Gleichungen) gezeigt, dass

$$\Phi_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x^{ggT(k,n)}-1)^{\cos(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{n})}$$

gilt. Eine Übung für den Leser ist es etwa zu zeigen, dass aus (1.86) für den Grad der Kreisteilungspolynome $\Phi_n(x)$ die Eulersche Phifunktion $\varphi(n)$ folgt. Die Lösung dazu findet sich ebenso in [9].

Ein von Marc-Antoine Parseval des Chênes 1799 zunächst nur auf reell-wertige Funktionen ohne Beweis (da er seine Richtigkeit für augenscheinlich hielt) veröffentlichtes Theorem, wurde später auf Fourier-Reihen ausgedehnt. Dieses Theorem wird zunächst für diskrete

Fouriertransformationen (1.40) bewiesen und im daran anschließenden Beispiel auf Fouriertransformationen des größten gemeinsamen Teilers (1.65) angewendet.

Theorem von Parseval für diskrete Fouriertransformationen:

Seien $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ zwei beliebige komplexe Zahlenfolgen (etwa zahlentheoretische Funktionen), dann gilt mit der Notation in (1.40) und (1.41):

$$\sum_{k=1}^{n} a(k)\cdot\overline{b(k)} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\hat{a}(m)\cdot\overline{\hat{b}(m)} \qquad (1.89)$$

wobei mit dem Überstrich wieder die komplexe Konjugation bezeichnet ist.

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n}\hat{a}(k)\cdot\overline{\hat{b}(k)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m_1=1}^{n} a(m_1)\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot m_1}{n}}}\cdot\sum_{m_2=1}^{n}\overline{b(m_2)}\cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot m_2}{n}} \overset{\substack{Summen-\\vertauschung}}{=} \sum_{m_1=1}^{n}\sum_{m_2=1}^{n} a(m_1)\cdot\overline{b(m_2)}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n} e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot m_1}{n}}}\cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot k\cdot m_2}{n}}}_{n\cdot\delta_0(m_2-m_1)} = n\cdot\sum_{m=1}^{n} a(m)\cdot\overline{b(m)}$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt aus der zweimaligen Anwendung von (1.40) wobei die zweifach komplexe Konjugation wieder die Identität $\overline{\overline{x+iy}} = \overline{x-iy} = x+iy$ ergibt und in der vorletzten Summe wurde (1.38) verwendet.

Beispiel 23) Das Theorem von Parseval für diskrete Fouriertransformationen von Funktionen des größten gemeinsamen Teilers.

Wenden wir nun das Theorem von Parseval (1.89) für diskrete Fouriertransformationen speziell auf (1.65) an, dann folgt für zahlentheoretischen Funktionen $a(n)$ bzw. $b(n)$ aus diesem:

$$\sum_{k=1}^{n} a(ggT(k,n))\cdot\overline{b}(ggT(k,n)) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}(a * c_{\bullet}(m))(n)\cdot(\overline{b} * c_{\bullet}(m))(n) \qquad (1.90)$$

Beispiel 24) Einige triviale Folgerungen aus (1.90)**:**

Sei $a(n)=b(n)=1(n)$, dann folgt aus (1.90) die Trivialität $n^2 = \sum_{m=1}^{n}\eta_n^2(m)$. Sei nun $a(n)=1(n)$ und $b(n)=\delta_1(n)$ dann folgt daraus der Spezialfall $\varphi(n)=c_n(n)$ von (1.75):

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\delta_1(ggT(k,n))}_{\varphi(n)} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\underbrace{(1 * c_{\bullet}(m))(n)}_{\eta_n(m)}\cdot\underbrace{(\delta_1 * c_{\bullet}(m))(n)}_{c_n(m)} = \frac{1}{n}\cdot n\cdot c_n(n) = c_n(n)$$

Sei weiters $a(n)=b(n)=id(n)$, dann gilt wegen (1.71) und (1.76) und (1.45):

$$\sum_{k=1}^{n}(ggT(k,n))^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}((\underbrace{id * c_{\bullet}(m)}_{\mu*\eta_{\bullet}(m)})(n))^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}((\varphi * \eta_{\bullet}(m))(n))^2$$

Beispiel 25) Die Besselgleichung für diskrete Fouriertransformationen des größten gemeinsamen Teilers sowie Beispiele dazu:

Sei jetzt in (1.90) $a(n)=b(n)=f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ gewählt, dann folgt mit (1.79):

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\underbrace{f(ggT(k,n))\cdot\overline{f}(ggT(k,n))}_{|f(ggT(k,n))|^2}}_{(|f|^2*\varphi)(n)}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}(f*c_{\bullet}(m))(n)\cdot(\overline{f}*c_{\bullet}(m))(n) \qquad (1.91)$$

Sei jetzt in (1.91) speziell $f(n)=n^z$ gewählt, dann folgt daraus:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\underbrace{ggT^{z}(k,n)\cdot ggT^{\overline{z}}(k,n)}_{ggT^{(z+\overline{z})}(k,n)}}_{(\bullet^{(z+\overline{z})}*\varphi)(n)}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}(\bullet^{z}*c_{\bullet}(m))(n)\cdot(\bullet^{\overline{z}}*c_{\bullet}(m))(n)$$

wobei $z+\overline{z}=x+iy+(x-iy)=2\cdot x=2\cdot\Re\mathrm{e}(z)\in\mathbb{R}$ und daher:

$$(\bullet^{2\cdot\Re\mathrm{e}(z)}*\varphi)(n)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\left|(\bullet^{z}*c_{\bullet}(m))(n)\right|^{2}$$

wobei mit $\Re\mathrm{e}(z)$ der Realteil von z notiert wurde. Sei jetzt etwa speziell $z=\frac{1}{2}$, dann folgt daraus weiter:

$$(id*\varphi)(n)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}(\sqrt{\bullet}*c_{\bullet}(m))^{2}(n)$$

eine Gleichung für die Pillaifunktion.

Beispiel 26) Die mittlere quadratische Summe über die Periode der $c_n(m)$:

Sei jetzt in (1.90) $a(n)=\delta_1(n)$ und gleichfalls $b(n)=\delta_1(n)$ gewählt, dann gilt mit (1.80):

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\delta_1(ggT(k,n))\cdot\delta_1(ggT(k,n))}_{\delta_1(ggT(k,n))}}_{\varphi(n)}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\underbrace{(\delta_1*c_{\bullet}(m))(n)}_{c_n(m)}\cdot\underbrace{(\delta_1*c_{\bullet}(m))(n)}_{c_n(m)}$$

also:

$$\varphi(n)=\frac{\sum_{m=1}^{n}c_n^2(m)}{n} \qquad (1.92)$$

Vgl. dieses Resultat auch mit (1.68) für $f(n)=\varphi(n)$ und $f(n)=\delta_1(n)$.

Bispielsweise für $n=6$: $\varphi(6)=\frac{\sum_{m=1}^{6}c_6^2(m)}{6}=\frac{1^2+(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2}{6}=\frac{12}{6}=2$

Beispiel 27) Noch eine Gleichung für die Eulersche Phifunktion.

Sei nun in (1.90) $a(n)=\delta_1(n)$ und $b(n)=id(n)$ dann gilt mit (1.80) und (1.65):

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\delta_1(ggT(k,n))\cdot ggT(k,n)}_{\sum_{k=1}^{n}\delta_1(ggT(k,n))=\varphi(n)} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n}\underbrace{(\delta_1 * c_\bullet(m))(n)}_{c_n(m)}\cdot\underbrace{(id * c_\bullet(m))(n)}_{\sum_{k=1}^{n} ggT(k,n)\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}}}$$

also:

$$\varphi(n) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{m=1}^{n} c_n(m)\cdot\sum_{k=1}^{n} ggT(k,n)\cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n}}}$$

Selbstverständlich kann auch hier wieder mit (1.5) in den Real und Imaginärteil aufgetrennt werden.

Viele weitere Beispiele dieser Art könnten hier folgen, d.h. der Formelindustrie sind auch für (1.90) nahezu keine Grenzen gesetzt.

Bemerkung: Das einfache (d.h. hier ausnahmsweise nicht das Diruchlet-) Produkt $f_1(n)\cdot f_2(n)$ zweier multiplilativer Funktionen $f_1(n), f_2(n)$, und sofern $f_2(n)\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$ auch die reziproke Funktion $\frac{1}{f_2(n)}$ und damit auch $\frac{f_1(n)}{f_2(n)}$ sind jeweils multiplikativ, wie sofort für ein $n = n_1\cdot n_2$ mit $ggT(n_1,n_2)=1$ ersichtlich ist:

$$f_1(n_1\cdot n_2)\cdot f_2(n_1\cdot n_2) = \left(f_1(n_1)\cdot f_2(n_1)\right)\cdot\left(f_1(n_2)\cdot f_2(n_2)\right)$$

$$\frac{1}{f_2(n_1\cdot n_2)} = \frac{1}{f_2(n_1)}\cdot\frac{1}{f_2(n_2)}$$

$$\frac{f_1(n_1\cdot n_2)}{f_2(n_1\cdot n_2)} = \frac{f_1(n_1)}{f_2(n_1)}\cdot\frac{f_1(n_2)}{f_2(n_2)}$$

Überdies ist, zumal der $ggT(n,m)$ bei festgehaltenem m in n multiplikativ ist, für ein mukltiplikatives $f(n)$, auch $f(\frac{n}{ggT(n,m)})$ wiederum in n multiplikativ, denn:

$$f(\frac{n_1\cdot n_2}{ggT(n_1\cdot n_2,m)}) = f(\frac{n_1}{ggT(n_1,m)}\cdot\frac{n_2}{ggT(n_2,m)}) = f(\frac{n_1}{ggT(n_1,m)})\cdot f(\frac{n_2}{ggT(n_2,m)})$$

und zudem wegen (1.33) in der Variable m n-periodisch. Ebenso ist das einfache Produkt zweier n-periodischer Funktionen sowie, unter denselben Voraussetzungen wie oben, auch die reziproke Funktion (und damit auch die Division zweier n-periodischer Funktionen) erneut n-periodisch.

Beispiel 28) Von Sterneck's arithmetische Funktion.

Der holländische Mathematiker Jan C. Kluyver (1860 - 1932) [10] und später Otto Hölder [11; 12 S. 243] haben gezeigt, dass die sogenannte von Sterneck's (1871 – 1928) [13] arithmetische Funktion:

$$c_n(m) = \frac{\mu(\frac{n}{ggT(n,m)})}{\varphi(\frac{n}{ggT(n,m)})} \cdot \varphi(n) \tag{1.93}$$

eine Identität zu den Ramanujansummen ist. In Beispiel 14 wurde gezeigt, dass die $c_n(m)$ n-periodisch in der Variable m sind und wegen obiger Bemerkung trifft dies auch für die rechte Seite von (1.93) zu.

Beweis: Da in Beispiel 14 überdies bewiesen wurde, dass die Ramanujansummen $c_n(m)$ in der Variable n multiplikativ sind und mit obiger Bemerkung die rechte Seite von (1.93) gleichfalls in der Variable n multiplikativ ist:

$$c_{n_1 \cdot n_2}(m) = \frac{\mu(\frac{n_1 \cdot n_2}{ggT(n_1,m) \cdot ggT(n_2,m)})}{\varphi(\frac{n_1 \cdot n_2}{ggT(n_1,m) \cdot ggT(n_2,m)})} \cdot \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2) = \frac{\mu(\frac{n_1}{ggT(n_1,m)})}{\varphi(\frac{n_1}{ggT(n_1,m)})} \cdot \varphi(n_1) \cdot \frac{\mu(\frac{n_2}{ggT(n_2,m)})}{\varphi(\frac{n_2}{ggT(n_2,m)})} \cdot \varphi(n_2)$$

genügt es die Identität (1.93) für Primzahlpotenzen p^α zu zeigen. Sei also $n = p^\alpha$ und $m \in \mathbb{Z}$ beliebig mit $m = p^\beta \cdot k$ wobei $ggT(p,k) = 1$ sei, dann gilt:

$$c_{p^\alpha}(p^\beta \cdot k) = \frac{\mu(\frac{p^\alpha}{ggT(p^\alpha, p^\beta \cdot k)})}{\varphi(\frac{p^\alpha}{ggT(p^\alpha, p^\beta \cdot k)})} \cdot \varphi(p^\alpha) = \frac{\mu(p^{\alpha-\min(\alpha,\beta)})}{\varphi(p^{\alpha-\min(\alpha,\beta)})} \cdot \varphi(p^\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ da } \mu(p^{\alpha-\beta}) = 0 \\ \quad \text{aber } \varphi(p^{\alpha-\beta}) \neq 0 & \text{falls } \beta < \alpha - 1 \\ \frac{\mu(p)}{\varphi(p)} \cdot \varphi(p^\alpha) = -p^{\alpha-1} & \text{falls } \beta = \alpha - 1 \\ \frac{\mu(1)}{\varphi(1)} \cdot \varphi(p^\alpha) = \varphi(p^\alpha) & \text{falls } \beta \geq \alpha \end{cases}$$

wobei $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ aus Beispiel 15 sowie (1.56) benutzt wurde. Der Vergleich mit (1.72) beweist nun obige Identität.

Beispiel 29) Orthogonalitätsrelation für die Ramanujansummen $c_n(m)$:

Sei $n = kgV(n_1,n_2) = \frac{n_1 \cdot n_2}{ggT(n_1,n_2)}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen n_1 und n_2. Da (1.64): $c_{n_1}(m) = \sum_{k=1}^{n_1} \delta_1(ggT(k,n_1)) \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k}{n_1}}} = \sum_{k=1}^{n_1} \delta_1(ggT(k,n_1)) \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k\cdot n_2/ggT(n_1,n_2)}{n}}}$ wegen Beispiel 15 reell ist, ändert die komplexe Konjugation das analoge Resultat für $c_{n_2}(m)$ nicht, weshalb:

$$\sum_{m=1}^{n} c_{n_1}(m) \cdot c_{n_2}(m) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \delta_1(ggT(l,n_2)) \cdot \delta_1(ggT(k,n_1)) \cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot k\cdot n_2/ggT(n_1,n_2)}{n}} \cdot e^{\overline{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot l\cdot n_1/ggT(n_1,n_2)}{n}}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \delta_1(ggT(l,n_2)) \cdot \delta_1(ggT(k,n_1)) \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{n} e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot m\cdot[k\cdot n_2/ggT(n_1,n_2) - l\cdot n_1/ggT(n_1,n_2)]}{n}}}_{n\cdot\delta_0(k\cdot n_2/ggT(n_1,n_2) - l\cdot n_1/ggT(n_1,n_2))} =$$

$$= n \cdot \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \delta_1(ggT(l,n_2)) \cdot \delta_1(ggT(k,n_1)) \cdot \delta_0(\underbrace{k \cdot \frac{n}{n_1} - l \cdot \frac{n}{n_2}}_{k\cdot n_2 - l\cdot n_1}) = \begin{cases} n \cdot \varphi(n) & \text{für } n_1 = n_2 = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

In der mittleren Zeile wurde (1.38) verwendet. Es müssen also zugleich die 3 Bedingungen: l und n_2 sowie k und n_1 sind teilerfremd und die Gleichung $k \cdot n_2 = l \cdot n_1$ zutreffen, was nur möglich ist, wenn $k = l$ und $n_1 = n_2$ ist, woraus obiges Resultat folgt, da sich aus (1.79) mit $f(n) = \delta_1(n)$ die Eulersche Phifunktion $\sum_{k=1}^{n} \delta_1(ggT(k,n)) = \varphi(n)$ ergibt. Es gilt also die bekannte Orthogonalitätsrelation:

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} c_{n_1}(m) \cdot c_{n_2}(m) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{für } n_1 = n_2 = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad n = kgV(n_1, n_2)$$

woraus erneut die mittlere quadratische Summe über die Periode n (1.92) folgt.

Die Ramanujansummen, die bislang eine zentrale Rolle gespielt haben, haben auch in anderen Bereichen der analytischen Zahlentheorie eine Bedeutung. Einen bedeutenden Aspekt, nämlich die sog. Dirichletreihen, die in gewissem Sinn auch eine analytische Interpretation des Dirichlet-Produktes (1.44) gestatten, wollen wir im kommenden Abschnitt beleuchten.

VIII Eine kurze Einführung in Dirichletreihen.

Dirichletreihen, benannt nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet, spielen in der analytischen Zahlentheorie eine entscheidende Rolle zahlentheoretische Funktionen mit Methoden aus der Analysis zu untersuchen und haben dort etwa dieselbe Bedeutung wie Potenzreihen in der Funktionentheorie:

Definition: Dirichletreihe: Sei $f(n)$ eine zahlentheoretische Funktion, dann wird:

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \qquad s \in \mathbb{C} \tag{1.94}$$

als die $f(n)$ zugeordnete Dirichletreihe $D(s)$ bezeichnet.

Bemerkung: Die Bezeichnung der Variable mit dem Buchstaben s statt z hat sich in der wissenschaftlichen Literatur (leider so) eingebürgert und hat keinen tieferen Sinn und soll daher keinesfalls zu Verwirrungen Anlass geben.

Die bekannteste Dirichletreihe ist die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$, die sich aus (1.94) ergibt, wenn für $f(n)$ die zahlentheoretische Funktion $1(n)$ gewählt wird, also

Riemannsche Zetafunktion: $$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1.95}$$

welche von Bernhard Riemann ausgiebig untersucht wurde. Diese Funktion hat eine herausragende Bedeutung in der analytischen Zahlentherie aber auch Anwendungen in den Naturwissenschaften (z.B.: Wärmekapazität eines Gitters in der Festkärperphysik [14]).

Bernhard Riemann (1826-1866) war ein deutscher Mathematiker, der trotz seines kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik und der analytischen Zahlentheorie bahnbrechend wirkte.

Wenn etwa in (1.95) für $s=1$ gewählt wird, dann folgt daraus die harmonische Reihe

$$\zeta(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty \qquad (1.96)$$

die den Wert ∞ annimmt und daher nicht konvergiert, denn:

Beweis: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\ln(x)\Big|_1^{\infty}=0+\infty$ (s. Abb. 2)

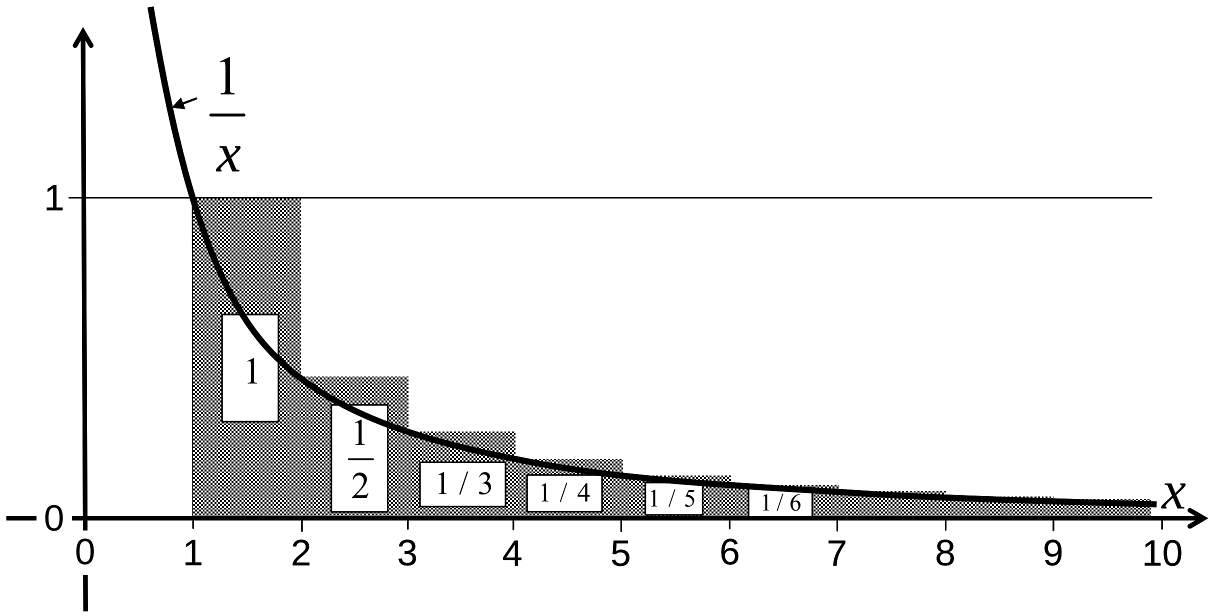


Abbildung 2: Die „Treppenfläche" ist größer als die Fläche unter der Funktion $\frac{1}{x}$ zwischen 1 und ∞.

Wenn in (1.95) für $s=2$ gewählt wird, dann konvergiert die Riemannsche Zetafunktion zu

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6} \qquad (1.97)$$

Der Beweis dafür sei dem Leser überlassen (sonst s. z.B.: Buch der Beweise Kap. 8 von M. Ziegler).

Das Konvergenzverhalten einer Dirichletreihe ist daher eine lohnenswerte Fragestellung.

Theorem: Wenn eine Dirichletreihe $D(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ für ein $s_0\in\mathbb{C}$ absolut konvergiert, (d.h. $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right|$ konvergiert) dann konvergiert sie in der gesamten offenen rechten Halbebene

$$H(s_0):=\{s\in\mathbb{C};\Re e(s)>\Re e(s_0)\}$$

absolut.

Beweis: Es gilt zunächst für alle $s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|n^{-s}\right| = \left|e^{-s\cdot\ln(n)}\right| = \left|e^{-(\Re e(s)+i\cdot\operatorname{Im}(s))\cdot\ln(n)}\right| = \left|e^{-\Re e(s)\cdot\ln(n)}\cdot e^{-i\cdot\operatorname{Im}(s)\cdot\ln(n)}\right| = \left|e^{-\Re e(s)\cdot\ln(n)}\right|\cdot\underbrace{\left|e^{-i\cdot\operatorname{Im}(s)\cdot\ln(n)}\right|}_{1} = \left|n^{-\Re e(s)}\right| = n^{-\Re e(s)}$$

wobei (1.5) benutzt wurde da ja $\left|e^{i\varphi}\right| = \left|\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi)\right| = 1$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. Der Betrag jedes Summanden $\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \left|f(n)\right|\cdot\left|\frac{1}{n^s}\right| = \left|f(n)\right|\cdot\left|\frac{1}{n^{\Re e(s)}}\right|$ in (1.94) hängt also nur vom Realteil von s ab. Sei nun (1.94) für ein s_0 absolut konvergent und $s \in H(s_0)$, d.h. $\Re e(s) > \Re e(s_0)$ $\Rightarrow\ -\Re e(s) < -\Re e(s_0)\ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}: n^{-\Re e(s)} \le n^{-\Re e(s_0)}\ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}: \left|f(n)\right|\cdot n^{-\Re e(s)} \le \left|f(n)\right|\cdot n^{-\Re e(s_0)}$ $\Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}: \left|f(n)\right|\cdot\left|n^{-s}\right| \le \left|f(n)\right|\cdot\left\|n^{-s_0}\right\|\ \Rightarrow\ \forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| \le \left|\frac{f(n)}{n^{s_0}}\right|$. Da voraussetzungsgemäß $D(s_0)$ absolut konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium $D(s)$ für alle $s \in H(s_0)$ ebenso absolut, womit das Theorem bewiesen ist.

Man beachte, dass dieses Theorem nichts über das Konvergenzverhalten der Dirichletreihe $D(s)$ für komplexe Zahlen s mit $\Re e(s) < \Re e(s_0)$ aussagt, es ist aber sinnvoll nach der größten Halbebene zu fragen in der $D(s)$ absolut konvergiert. Die Vereinigung

$$A = \bigcup_{s\in\mathbb{C}}\{H(s); D(s) \text{ konvergiert in } s \text{ absolut}\} \tag{1.98}$$

aller Halbebenen $H(s)$, in denen $D(s)$ absolut konvergiert, ist sodann wohl die größte offene absolute Konvergenzhalbene A. Der Schnittpunkt $(\sigma_{abs},0)$ der linken Grenzlinie von A (die wegen der Offenheit geradewegs nicht mehr zu A gehört) mit der reellen Achse legt die absolute Konvergenzabszisse σ_a fest und in jedem Punkt s mit $\Re e(s) < \Re e(\sigma_a)$ kann die Dirichletreihe nicht mehr absolut konvergieren, denn dies würde mit obigem Theorem im Widerspruch zu (1.98) stehen. Zum Konvergenzverhalten auf obiger Grenzlinie kann im Allgemeinen keine Aussage gemacht werden und ist in der Regel selbst in vereinzelten Punkten auf dieser Grenzlinie ein schwieriges Unterfangen. In dem Fall, dass $A = \mathbb{C}$ ist, ist $\sigma_{abs} = -\infty$ und im anderen Extremfall, wenn $D(s)$ nirgends absolut konvergiert ist $\sigma_{abs} = \infty$.

Ähnlich (allerdings etwas aufwändiger) kann man zeigen, dass es auch eine Halbebene B für die bedingte Konvergenz und demzufolge auch eine bedingte Konvergenzabszisse σ_{bed} für (1.94) gibt, die zwangsläufig $\sigma_{abs} \ge \sigma_{bed}$ erfüllen muss, da ja aus der absoluten Konvergenz die bedingte Konvergenz folgt, nicht aber umgekehrt. Überdies gilt $\sigma_{abs} - \sigma_{bed} \le 1$.

Theorem: Seien die beteiligten Dirichletreihen für ein s_0 absolut konvergent, dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_1(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_2(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f_1 * f_2)(n)}{n^s} \qquad \forall s \in H(s_0)\cup\{s_0\} \tag{1.99}$$

d.h.: Dirichletsche Multiplikation und Multiplikation der Dirichletreihen entsprechen einander.

Beweis: Wegen der vorausgesetzten absoluten Konvergenz darf beliebig umgeordnet werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_1(n)}{n^s}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_2(m)}{m^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_1(n)\cdot f_2(m)}{(n\cdot m)^s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{n\cdot m=k} f_1(n)\cdot f_2(m)}{k^s}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f_1 * f_2)(k)}{k^s}$$

Insbesondere folgt daraus für invertierbare zahlentheoretische Funktionen mit (1.49) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_1(n)}{n^s}=1$, d.h:

$$\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^s} \tag{1.100}$$

im Durchschnitt der absoluten Konvergenzhalbebenen.

Man kann auch rel. einfach zeigen, dass aus $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=0$ für alle s in irgendeiner rechten Halbebene $f(n)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ folgt.

Beispiel 30) Die Konvergenzabszissen für die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$:

Die Riemannsche Zetafunktion ist in $H(1)$ absolut konvergent.

Beweis: Sei $r=\Re e(s)$, dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^r}dx=1+\left.\frac{x^{1-r}}{1-r}\right|_1^{\infty}<\infty$ für alle $r>1$ (s. Abb. 3)

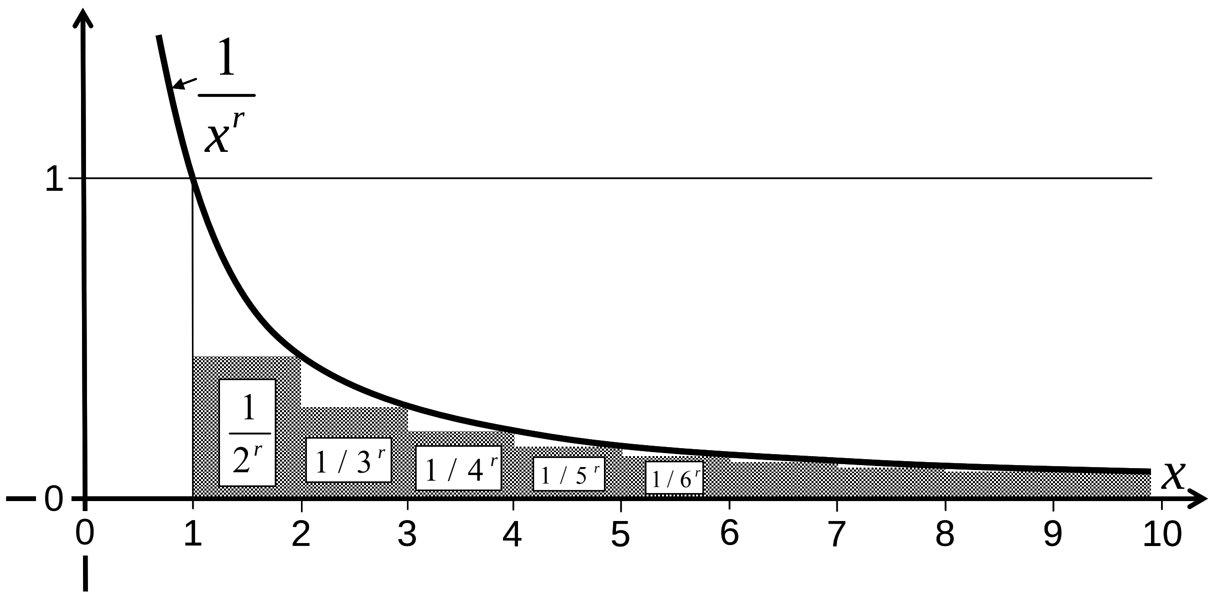


Abbildung 3: Die „Treppenfläche“ ist kleiner als die Fläche unter der Funktion $\frac{1}{x^r}$ zwischen 1 und ∞.

Andererseits ist wegen (1.96) die Riemannsche Zetafunktion für $s=1$ divergent. Die absolute Konvergenzabszisse σ_{abs} für die Riemannsche Zetafunktion ist daher gleich 1 und wegen $1(n)=|1(n)|=1$ für alle natürlichen Zahlen n ist in diesem Fall die bedingte Konvergenzabszisse σ_{bed} gleich der absoluten σ_{abs}.

Beispiel 31) Die Riemannsche Zetafunktion und die Möbiusfunktion $\mu(n)$:

Aus (1.57) folgt mit (1.100) im Durchschnitt der absoluten Konvergenzhalbebenen der beteiligten Dirichletreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1 \qquad (1.101)$$

woraus $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$ folgt.

Aus der Definition (1.56) ist ersichtlich, dass für alle natürlichen Zahlen n: $|\mu(n)|\le 1$ ist und daher konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ in $H(1)$ mit derselben Argumentation wie im vorigen Beispiel absolut. Der Durchschnitt der absoluten Konvergenzhalbebenen für (1.101) ist daher $H(1)$.

Definition: Eine **abbrechende zahlentheoretische Funktion** $a(n)$ ist eine zahlentheoretische Funktion, die ab einem $m_0\in\mathbb{N}$ für alle $n>m_0$ stets den Wert 0 annimmt, also mit der Kronecker Deltafunktion (1.36):

$$a(n)=\sum_{m=1}^{m_0}a(m)\cdot\delta_m(n) \text{ mit } a(m)\in\mathbb{C}\ \ \forall m\le m_0 \qquad (1.102)$$

(Bemerkung: In (1.102) ist bereits $a(n)=0$ für alle $n>m_0$ implizit enthalten.)

Ein Beispiel für eine abbrechende zahlentheoretische Funkton ist die Funktion $\eta_n(m)$ für alle $m\in\mathbb{Z}\setminus 0$ denn

$$\eta_n(m)=0\ \ \forall n>|m|>0 \qquad (1.103)$$

wie aus (1.34) bzw. Tab. 1 ersichtlich ist.

Theorem: Die einer abbrechenden zahlentheoretischen Funktion $a(n)$ zugeordnete Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$ ist eine ganze Funktion. (1.104)

Beweis: Obige Dirichletreihe ist wegen der vorausgesetzten abbrechenden zahlentheoretischen Funktion nur eine endliche Summe. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist der Summand $\frac{a(n)}{n^s}=a(n)\cdot e^{-s\cdot\ln(n)}$ in der Variable s eine ganze Funktion, da dies ja für die

Exponentialfunktion zutrifft und eine endliche Linearkombination ganzer Funktionen wieder eine ganze Funktion ist. Die Dirichletreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}$ konvergiert daher in der gesamten komplexen Ebene (und die absolute σ_{abs}, wie auch die bedingte Konvergenzabszisse σ_{bed} sind beide $-\infty$).

Beispiel 32) Die $\eta_n(m)$ zugeordnete Dirichletreihe:

Sei $\sigma_s(n)$ wie in (1.43) bzw. (1.60), dann folgt mit (1.44):

$$\sigma_s(n)=\sum_{d|n}d^s=\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^s=\sum_{d=1}^{n}\left(\frac{n}{d}\right)^s\frac{\eta_d(n)}{d}=n^s\cdot\sum_{d=1}^{n}\frac{\eta_d(n)}{d^{s+1}}=n^s\cdot\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\eta_d(n)}{d^{s+1}} \qquad (1.105)$$

da mit (1.34) $\frac{\eta_d(n)}{d}=\begin{cases}1 & \text{für } d|n\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ gilt sowie $\eta_d(n)=0$ für $d>n$ ist, also:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k(n)}{k^s}=\frac{\sigma_{s-1}(n)}{n^{s-1}} \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ ;\ s\in\mathbb{C} \qquad (1.106)$$

eine Dirichletreihe für $\eta_n(m)$ ergibt, die wegen (1.103) und Theorem (1.104) eine ganze Funktion in der Variable s ist.

Es folgt aus (1.106) weiter das folgende

Theorem: Die Teilerfunktion $\sigma_z(n)=n^z\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta_m(n)}{m^{z+1}}$ ist in der Variable z für alle $n\in\mathbb{N}$ eine ganze Funktion

was ja auch bereits aus (1.43) ersichtlich ist und eben aus (1.43) folgt auch $\sigma_{-z}(n)=\sum_{d|n}d^{-z}=\frac{1}{n^z}\cdot\sum_{d|n}\left(\frac{1}{d}\right)^z=\frac{\sigma_z(n)}{n^z}$, sodass damit weiter $\sigma_{-z}(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta_m(n)}{m^{z+1}}$ bzw.

$$\sigma_z(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta_m(n)}{m^{1-z}} \qquad (1.107)$$

resultiert.

Bemerkung: Auch für negative ganze Zahlen n ist (1.105) wegen (1.34) interessanterweise mit Sinn erfüllt, d.h. die Teilerfunktion $\sigma_z(n)$ lässt sich auf die negativen ganze Zahlen (mehrdeutig) fortsetzen. Schließlich sei angemerkt, dass (1.34) und damit auch (1.107) für $n\in\mathbb{C}$ ausgewertet werden kann. (Allerdings ist dann (1.107) keine endliche Summe mehr).

Theorem: Sei die der zahlentheoretischen Funktion $f(n)$ zugeordnete Dirichletreihen für ein $s_0\in\mathbb{C}$ konvergent und $a(n)$ eine abbrechende zahlentheoretische Funktion, dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a*f)(n)}{n^s} \qquad \forall s\in H(s_0)\cup\{s_0\} \qquad (1.108)$$

Bemerkung: Im Gegensatz zu (1.99) wurde <u>nicht die absolute Konvergenz, sondern lediglich die bedingte Konvergenz</u> der $f(n)$ zugeordnete Dirichletreihen vorausgesetzt.

Beweis: Sei zunächst für $a(n) = \delta_m(n)$ die offensichtlich abbrechende Kronecker Deltafunktion (1.36) gewählt also:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_m(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{m^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{(m\cdot n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_m(n)}{n^s} \text{ mit } f_m(n) := \begin{cases} f(\frac{n}{m}) & \text{für } n \equiv 0(m) \\ 0 & \text{für } n \not\equiv 0(m) \end{cases}$$

woraus mit (1.66) das Zwischenresultat

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_m(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\delta_m * f)(n)}{n^s} \qquad \forall s \in H(s_0)\cup\{s_0\}$$

folgt. Da eine endliche Linearkombination konvergenter Reihen konvergiert, folgt daraus nach der Multiplikation beider Seiten mit $a(m)$ und Summation über $1 \le m \le m_0$ und sodann erlaubter Summenvertauschung von endlich vielen konvergenten Reihen auf beiden Seiten mit (1.102) für die linke Seite sowie mit $\sum_{m=1}^{m_0} a(m)\cdot(\delta_m * f)(n) = (a * f)(n)$ für die rechte Seite der Beweis.

Definition: Primzahlfunktion $\pi(x)$: Für eine beliebige reelle Zahle x ist die Primzahlfunktion $\pi(x)$ definiert als die Anzahl der Primzahlen, die nicht größer als x sind. Etwa $\pi(7) = 4$, da die vier Primzahlen 2,3,5 und 7 nicht größer als 7 (⇔ kleiner oder gleich 7) sind.

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\pi(x)$	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4

Tabelle 7: Einige Zahlenwerte der Primzahlfunktion $\pi(x)$

Theorem: Primzahlsatz: $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)} = 1$

Der Beweis dieses Satzes ist aufwändig und kann daher an dieser Stelle nicht bewiesen werden. Der Primzahlsatz erlaubt demnach eine Abschätzung der Verteilung der Primzahlen mittels Logarithmen. Der Zusammenhang zwischen Primzahlen und Logarithmen wurde bereits von dem 15-jährigen Carl Friedrich Gauß 1793 und unabhängig von ihm durch Adrien-Marie Legendre 1798 vermutet, aber erst 1896 unabhängig von Jacques Salomon Hadamard und Charles-Jean de La Vallée Poussin bewiesen [15,16]. Äquivalent zum Primzahlsatz ist die Aussage, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n} = 0 \tag{1.109}$$

gilt, worin $\mu(n)$ die Möbiusfunktion (1.56) ist [17; Landau 1911].

Beispiel 33) Die den Ramanujanschen Summen $c_n(m)$ zugeordnete Dirichletreihe und eine dieser zum Primzahlsatz äquivalente Beziehung.

Aus (1.71) und (1.108) zusammen mit (1.101) und (1.106) folgt sodann für alle $s \in H(1)$ und mit dem Primzahlsatz (1.109) sogar für alle $s \in H(1)\cup\{1\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(m)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu*\eta_\bullet(m))(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n(m)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\frac{\sigma_{s-1}(m)}{m^{s-1}} \qquad (1.110)$$

die Dirichletreihe für die Ramanujanschen Summen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(m)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}\cdot\frac{\sigma_{s-1}(m)}{m^{s-1}} \qquad \forall m\in\mathbb{N};\ s\in H(1)\cup\{1\}$$

und daraus eine bereits von Ramanujan 1918 [18] publizierte Gleichung für die Teilerfunktion

$$\sigma_s(n)=\zeta(s+1)\cdot n^s\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m(n)}{m^{s+1}} \qquad \forall s\in H(0) \qquad (1.111)$$

bzw. dieselbe Überlegung, die zu (1.107) geführt hat ergibt eine ebenfalls schon Ramanujan bekannte Gleichung $\sigma_s(n)=\zeta(1-s)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m(n)}{m^{1-s}}$. Gleichungen dieser Bauart für $\sigma_s(n)$ lassen sich analog (1.110) statt mit $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ mit jeder (irgendwo) konvergenten Dirichletreihe generieren, also ein Spielplatz für die Formelindustrie.

Setzt man in (1.111) für $c_m(n)$ die Definitionsgleichung (1.64) ein und spaltet für reelle s mit (1.5) in den Real und Imaginärteil auf, dann folgt daraus etwa für $s=1$ mit (1.97) eine gleichfalls in [18] veröffentlichte Gleichung:

$$\sigma(n)=\frac{\pi^2}{6}\cdot n\cdot\left\{1+\frac{(-1)^n}{4}+\frac{2\cos\frac{2\cdot\pi\cdot n}{3}}{9}+\frac{2\cos\frac{\pi\cdot n}{2}}{16}+\ldots\right\} \qquad (1.112)$$

Schließlich folgt aus (1.110) und (1.106) für $s=1$ (d.h. mit dem Primzahlsatz (1.109)) wegen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n(m)}{n}=d(m)$ also der Teileranzahlfunktion aus Beispiel 3: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(m)}{n}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}}_{0}\cdot d(m)$

eine bekannte [18] dem Primzahlsatz äquivalente Gleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n(m)}{n}=0 \qquad \forall m\in\mathbb{N} \qquad (1.113)$$

denn für $m=1$ folgt umgekehrt daraus wegen (1.84) erneut (1.109).

Wenn nunmehr dieses Skriptum beim (bei der) LeserIn das Interesse an der Mathematik geweckt haben sollte und er (sie) an einem 2. Teil interssiert sein sollte, so ersuche ich ihn (sie) um Geduld, denn im AKH Wien steht die Versorgung der Patienten im Vordergrund (s. Abschnitt X) und bedauerlicherweise wurde das 3-Stunden Zeitfenster für Wissenschaft und Forschung nach einem jeweiligen 25 Stunden klinischen Tag und Nachtdienst an der Medizinischen Universität Wien im Jahr 2015 wieder abgeschafft.

IX Anhang: Beweis der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

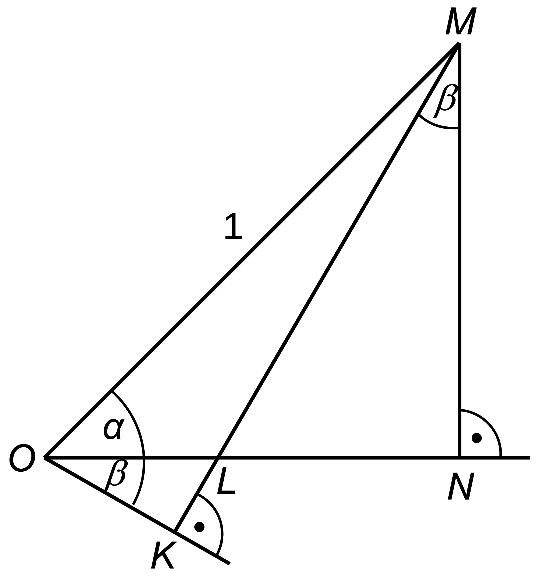


Abbildung 4 zum Beweis der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Für $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ gilt in obiger Abb. 4 im Dreieck $\Delta(OKL) : \cos(\beta) = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\left|\overline{OL}\right|}$ und im Dreieck $\Delta(LMN)$: $\tan(\beta) = \dfrac{\left|\overline{LN}\right|}{\sin(\alpha)}$. Wegen $\cos(\alpha) = \left|\overline{OL}\right| + \left|\overline{LN}\right|$ folgt daraus

$\cos(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta)} + \sin(\alpha)\cdot\tan(\beta)$ und nach Multiplikation mit $\cos(\beta)$ sowie Umordnung:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \qquad (1.114)$$

Analog argumentiert man für andere Winkelbereiche α oder $\beta \notin (0, \pi/2)$ und erhält so (mit den Symmetrieeigenschaften (1.7) für $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ als gerade und $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ als ungerade Funktion) das Additionstheorem (1.17) für den Cosinus.

In diesen Beweis sind lediglich (die in der Einleitung angeführten) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen und leicht daraus ableitbare Eigenschaften sowie die Def. $\tan(\beta) := \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$ eingegangen.

Aus (1.114) mit den Beziehungen $\sin(\varphi) = \cos(\varphi - \pi/2)$ und $\cos(\varphi) = -\sin(\varphi - \pi/2)$ (welche genau genommen hier noch bewiesen werden sollten) folgt sodann $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta-\pi/2) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta-\pi/2) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta-\pi/2)$ und daraus abermals mit den Symmetrieeigenschaften das Additionstheorem (1.18) für den Sinus.

X Anmerkung:

Der leichteren Lesbarkeit wegen, wurden nur die für das Verständnis wichtigen Beweisschritte angegeben. Der Autor dieses Skriptums ist Arzt an der Universitätsklinik für Anästhesie, Allgemeine Intensivmedizin und Schmerztherapie an der Medizinischen Universität Wien. Dieses Skriptum wurde in dem von der Medizinischen Universität Wien für Wissenschaft und Forschung vorgesehenen 3-Stunden Zeitfenster nach einem jeweiligen 25 Stunden klinischen Tag und Nachtdienst geschrieben. (Einer Aussage des ehem. Bundesministers Töchterle zufolge ist die Aufgabe der Medizinischen Universitäten die Sicherstellung des Lehr und Forschungsbetriebs durch die Ärzte [Bundesminister Töchterle im Gespräch mit Medizinstudenten (Stand 18.5.2012)]. Aber 70 Prozent der Leistungen des ärztlichen Personals, so der Rektor der Medizinischen Universität Wien, Prof. Wolfgang Schütz, betreffen Routineleistungen eines Zentralkrankenhauses, die nichts mit Lehre und Forschung zu tun haben [Stellungnahme und Empfehlung zum klinischen Mehraufwand 06/2012]. In klinischen Abteilungen (z.B.: Chirurgie, Anästhesie, …) ist dieser Prozentsatz weitaus höher, was auch aus einem 2005 publizierten Diskussionsbeitrag [19] hervorgeht, in welchem die klinischen Abteilungen der Medizinischen Universität Wien zu über 95% nur mehr als spezialisierte Gesundheitseinrichtungen eines Gemeindekrankenhauses bezeichnet werden und deshalb den UniversitätsprofessorInnen und DozentInnen im täglichen Krankenhaus-Routinebetrieb Zeitzuteilungen für Wissenschaft wie auch Forschung in aller Regel nur noch möglich sind, wenn dadurch die Patientenversorgung nicht gefährdet ist (s. dazu auch den Folder „Universitätsklinik statt Gemeindespital“ des akademischen Mittelbaus an der Medizinischen Universität Wien aus dem Jahr 2013.) Meine persönliche Empfehlung dazu: Wenn Sie, sehr geehrter Leser, eine wissenschaftliche Karriere an einer Universität planen, dann prüfen Sie zuvor die Universität sehr genau. Schließlich sei angemerkt, dass die in diesem Skriptum beschriebenen Ramanujanschen Summen auch in der Grundlagenforschung der Medizin, etwa im Biomedical Engineering, Anwendungen haben [2] (speziell in [2] im Gegensatz zu der im Abschnitt VI beschriebenen Fourier Transformation von Funktionen des *ggT*() die schon seit langem bekannte Ramanujan Fourier Transformation). Die in diesem Skriptum hergeleitete Diskrete Fourier Transformation (1.40) mit deren Inverser (1.41) hat nicht nur in der Technik, sondern auch in der Medizin, ja selbst in der Anästhesie [20] ein breites Anwendungsfeld.

XI Literatur:

[1] Schramm, Wolfgang (2008): The Fourier transform of functions of the greatest common divisor. Integers Electronic Journal of Combinatorial Number Theory (University of West Georgia, Charles University in Prague) 8: A50.

[2] Mainardi Luca at al. (2007): Application of the Ramanujan Fourier Transform for the analysis of secondary structure content in amino acid sequences. Methods Inf Med. 2007;46(2):126-9.

[3] Forster Otto (1983): Analysis 1 Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen Vieweg p. 87

[4] Ramanujan Srinivasa (1916): On Certain Arithmetical Functions. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 22, Nr. 9, pp. 159–184.

[5] Kluyver J.C. (1906): Some formulae concerning the integers less than *n* and prime to *n*, in: KNAW, Proceedings, 9 I, 1906, Amsterdam, pp. 408-414

[6] Cesàro Ernest. (1885) : Étude moyenne du plus grand commun diviseur de deux nombres. Annali di Matematica Pura ed Applicata (Tortolini, etc.). Rome. Vol. 13, pp 235-250.

[7] Euler Leonhard (1760): Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata. Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 8 : 74-104

[8] Gauss D. Carolo Friderico (1801): Disquisitiones Arithmeticae

[9] Schramm Wolfgang (2015): Eine alternative Produktdarstellung für die Kreisteilungspolynome. [An alternative product for the cyclotomic polynomials.] Elemente der Mathematik. (2015) 70 (4): 137–143

[10] Kluyver Jan C. (1906): Some formulae concerning the integers less than *n* and prime to *n*, in: KNAW, Proceedings 9 I, Amsterdam, 408–414.

[11] Hölder Otto (1936): Zur Theorie der Kreisteilungsgleichung $K_m(x) = 0$, Prace Matematyczno Fizyczne 43, 13–23.

[12] Hardy, G. H.; Wright, E. M. (1980): An Introduction to the Theory of Numbers (Fifth edition), Oxford: Oxford University Press, ISBN 978-0-19-853171-5

[13] Daublebsky Von Sterneck Robert (1902): Ein Analogon zur additiven Zahlentheorie, Sitzber, Akad. 111 Wiss. Wien, Math. Naturw. Klasse, vol. I ll (Abt. IIa), 1567–1601.

[14] Grimus Walter (2010): Einführung in die Statistische Physik und Thermodynamik, Grundlagen und Anwendungen. Oldenburg-Verlag Seite 110

[15] Hadamard Jacques (1896): Sur la distribution des zéros de la fonction ζ(s) et ses conséquences arithmétiques. Bulletin de la Société Mathématique de France 24 pp 199-220.

[16] Charles de La Vallée Poussin (1896, 1897): Recherches analytiques de la théorie des nombres premiers. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles 20 B (1896), pp. 183-256, 281-352, 363-397; 21 B (1897), pp. 351-368.

[17] Landau Edmund (1899) : Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$, Inaugural-Dissertation (Berlin 1899).

[18] Ramanujan Srinivasa (1918): On Certain Trigonometric Sums and their Applications in the Theory of Numbers. Transactions of the Cambridge Philosophical Society 22 (15): 259–276 (pp. 179–199 of his Collected Papers)

[19] (2005) Ist die Medizinische Universität Wien nur mehr ein Krankenhaus der Gemeinde Wien?

[20] Green MD et al. (1996): Automated system for detailed measurement of respiratory mechanics. J Clin Monit. 1996 Jan;12(1):61-7